Schriftliche Abiturprüfung 2002
3. Prüfungsfach Mathematik   Fachlehrer www.helmut-hupfeld.de

Aufgabe

Gegeben seien die Funktionenscharen f_a und g_a mit den Funktionsgleichungen:

$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x \qquad g_a(x) = x^3 - a^2x \qquad x \varepsilon R, \quad a \varepsilon R^+$

a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion beider Funktionenscharen durch. Charakterisieren Sie die beiden Scharen für sich und im Verhältnis zueinander.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f_2 und g_2 (d.h. also für den Fall a=2) in einem sinnvollen Maßstab und in einem sinnvollen Bereich. Berechnen Sie die Fläche, die f_2 und g_2 miteinander einschließen. Beschreiben Sie dazu auch den Lösungsweg.

c) Zeigen Sie, dass sich f_a und g_a für $x < 0$ und $x > a$ nicht schneiden. Berechnen Sie die endliche Fläche A(a), die die beiden Graphen von f_a und g_a miteinander einschließen (d.h. also für den allgemeinen Fall).

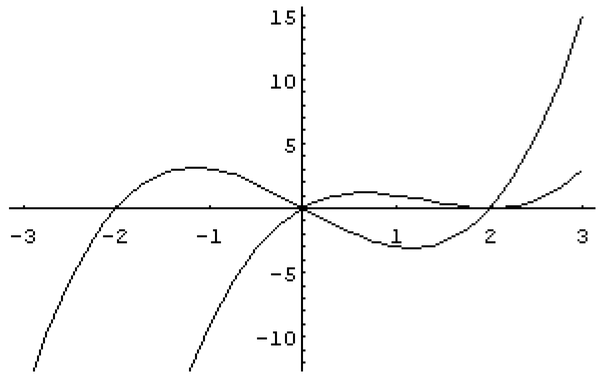
d) Die Gerade $y=2\cdot x$ zerlegt die Fläche, die f_2 und g_2 (also a=2) miteinander einschließen, in zwei Teile. Berechnen Sie, wie groß diese beiden Flächen sind. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

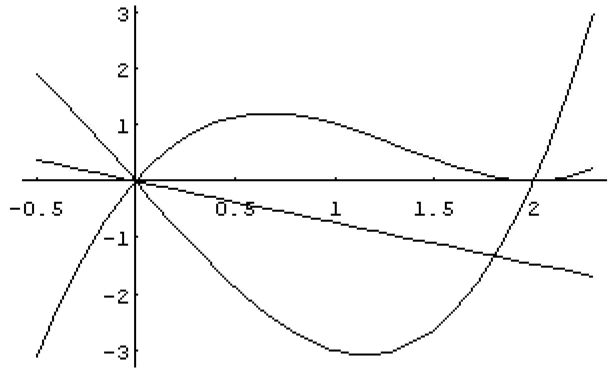
e) Bestimmen Sie m so, dass die Gerade mit der Funktionsgleichung $y=m\cdot x$ die von f_a und g_a eingeschlossene Fläche halbiert.

Lösungen

Teil- auf- gabe	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse Aufgabe bzw. V1.1	Zuordnung und vorgesehene Bewertung I	 II	 III
a	f_a: $x_{N1}=0$ (einf.) $x_{N2,3}=a$ (doppelt) $f_a'(x)=3x^2-4ax+a^2$ $x_{E1}=\frac{a}{3}$, $x_{E2}=a$, $f_a(\frac{a}{3})=0$, $f_a(a)=\frac{4a^3}{27}$ $f_a''(x)=6x-4a$ $x_W=\frac{2a}{3}$, $f_a(\frac{2a}{3})=\frac{2a^3}{27}$ g_a: $x_{N1}=-a$, $x_{N2}=0$, $x_{N3}=a$, $g_a'(x)=3x^2-a^2$ $x_{E1}=-\frac{a}{3}\sqrt{3}$, $x_{E2}=+\frac{a}{3}\sqrt{3}$, $g_a(x_{E1})=0{,}3849a^3$, $g_a(x_{E2})=-0{,}3849a^3$ $g_a''(x)=6x$ $x_W=0$, $g_a(0)=0$. Verbale Charakterisierung der Scharen. Logisch plausible Begründung für das Vorliegen von Extrem- u. Wendestellen.	3 5 3 2 3 3	2 4	
b	Zeichnung der beiden Graphen. $A(2)=\int_0^2(g_2(x)-f_2(x))dx=\int_0^2(-4x^2+8)dx=\left[-\frac{4x^3}{3}+8x\right]=-\frac{32}{3}+16-0=5\frac{1}{3}\,FE$ (einschließlich kurzer Beschreibung des Lösungsweges)	4	4 5	
c	$f_a(x)=g_a(x)$, $-2ax^2+a^2x=-a^2x$, $-2ax^2+2a^2x=0$, $-2ax(x-a)=0$, es gibt somit nur zwei Schnittstellen bei $x=0$ und bei $x=a$. $A(a)=\int_0^a(g_a(x)-f_a(x))dx=\int_0^2(-2ax^2+2a^2)dx=\left[-\frac{2ax^3}{3}+2a^2x\right]=\frac{a^4}{3}\,FE$	1	2 3	
d	Schnittpunkte von $y=2x$ mit f_2 berechnen: $f_2(x)=2x$ $x_{S1}=0$; $x_{S2}=2-\sqrt{2}$. Das Integral ergibt: $A_1=\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{11}{3}=0{,}1046$ $A_2=A_{ges}-A_1=5{,}3333-0{,}1046=5{,}2287$. Skizze (unten nicht mit dargestellt).	2	2 5 2 3	
e	Überlegung, dass es einen Schnittpunkt von $y=mx$ mit g_2 geben muss (III). Schnittpunkt von g_2 und $y=mx$ berechnen: $x_{S1}=0$, $x_{S2}=-\sqrt{m+4}$, $x_{S3}=\sqrt{m+4}$, nur x_{S3} ist von Interesse (III). $\int_0^{\sqrt{m+4}}(mx-x^3+4x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+(m+4)\frac{x^2}{2}\right]=\left[-\frac{(m+4)^2}{4}+\frac{(m+4)^2}{2}\right]=\left[\frac{(m+4)^2}{4}\right]$ Nun muss gelten: $\frac{(m+4)^2}{4}=\frac{8}{3}$, woraus folgt, dass $m=\frac{4}{3}\sqrt{6}-4=-0{,}734$.		3 2	1 4
	Summe:	26	37	5
	in Prozent:	38	54	8

Die in b) geforderte Abbildung (links), Skizze zu e) (rechts), : Skizze zu d) ist ganz ähnlich zu der zu e) und wird hier nicht aufgeführt.


15
10
5
-5
-10
-3
-2
-1
1
2
3


3
2
1
-1
-2
-3
-0.5
0.5
1
1.5
2