

Aufgabe 6

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $a \neq 0$ und der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = (2x + a) \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

- a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der Schar durch. Zeichnen Sie dann die Graphen der Funktionenschar für $a=2$ und $a=4$ in einem sinnvollen Bereich. Charakterisieren Sie die Schar insgesamt. Zeigen Sie dabei, dass die erste Ableitung folgendermaßen aussieht:

$$f'_a(x) = 2 \cdot e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{2}{a}x + 1 \right) \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

Faktorisieren Sie den Funktionsterm von f' auch.

- b) Weisen Sie nach, dass die Extrempunkte alle auf einer Geraden liegen und berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden. Trifft eine solche Aussage auch für die Wendepunkte zu ?
- c) Zeigen Sie, dass sämtliche Wendetangenten zueinander parallel sind. Berechnen Sie dann die Wendetangente für $a=2$ und ihren Schnittpunkt mit der x -Achse.
- d) Sei nun $P(k/0)$ ein Punkt auf der x -Achse. Überlegen Sie, für welche Werte von k man eine Tangente an den Graphen von f_2 zeichnen kann. Sie können auch eine anschaulich plausible Betrachtung durchführen.
- e) Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von f_1 (also für $a=1$) mit der x -Achse zwischen der Nullstelle und $x=k$ einschließt. Das lässt sich einerseits mit dem Rechner ausrechnen, aber Sie sollen auch die Integrationsschritte vorrechnen. Wie groß kann diese Fläche werden ?

Lösungen

Teilaufgabe	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse zur Aufgabe 6 bzw. V2.1	Zuordnung und vorgesehene Bewertung		
		I	II	III
a	<p>sei $a < 0$; $x \rightarrow -\infty$ dann $y \rightarrow \infty$ $x \rightarrow +\infty$ dann $y \rightarrow 0$ sei $a > 0$; $x \rightarrow -\infty$ dann $y \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$ dann $y \rightarrow \infty$ Wegen des Faktors e^{-x} ist der Graph nicht symmetrisch. Eine Nullstelle liegt bei $x_{n1} = \frac{-a}{2}$</p> $f'_a(x) = -\frac{1}{a}(2x-a) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \quad f''_a(x) = \frac{1}{a^2}(2x-3a) \cdot e^{-\frac{x}{a}}$ <p>Daraus folgt, dass bei $x_e = \frac{a}{2}$ eine Extremstelle liegt und bei $x_w = \frac{3a}{2}$ eine Wendestelle und dass es ansonsten keine Extrem- und Wendestellen gibt. $f_a(x_e) = \frac{2a}{\sqrt{e}}$; $f_a(x_w) = \frac{4a}{\sqrt{e^3}}$ Zeichnung der Graphen und spezielle Werte für $a=2$ und $a=4$</p>	4 1 3 2 6	1 4 3	
b	$f_a(x) = \frac{2a}{\sqrt{e}} = \frac{4x_e}{\sqrt{e}}$; $f_a(x_w) = \frac{4a}{\sqrt{e^3}} = \frac{8x_w}{\sqrt{e^3}}$ Daraus geht hervor, dass sowohl die Extrem- wie die Wendepunkte auf Geraden durch den Ursprung liegen (III).		2 1	2
c	$f'_a(x_w) = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}$; d.h. die Steigung aller Wendetangenten hängt nicht von a ab, und daher müssen sie parallel zueinander sein (III). Für $a=2$ gilt dann: $m = -2 \cdot e^{-1,5}$; $y = mx + b$; $8 \cdot e^{-1,5} = -2 \cdot e^{-1,5} \cdot 3 + b$ damit wird $b = 14 \cdot e^{-1,5}$; also $y = -2 \cdot e^{-1,5}(x-7)$. Die x-Achse wird also bei $x=7$ geschnitten.		2 3 2	1
d	Im Wendepunkt hat die Tangente vom Betrag her die größte Steigung. Daher schneiden alle anderen Tangenten weiter rechts. Daraus folgt, dass es für $x \geq 7$ möglich ist, eine Tangente an f_2 zu legen (III). Im negativen Bereich ist es von der Nullstelle an möglich, eine Tangente an den Graphen zu legen.		3	2
e	$\int_{-0,5}^k (2x+1)e^{-x} dx = [(2e^{k+0,5} - 2k - 3)e^{-k}]$ Lässt man $k \rightarrow \infty$ laufen, so nimmt die Fläche den Wert: $A = 2\sqrt{e}$ an. (Im Unterricht nicht behandelt, offenes Problem, III).	2	4	2
	Summe:	18	25	7
	in Prozent:	36	50	14

Rechts sind die Graphen für $a=1$, $a=2$ und $a=4$ zu sehen.

