

## Schriftliche Abiturprüfung 2002

3. Prüfungsfach Mathematik    Fachlehrer: [www.helmut-hupfeld.de](http://www.helmut-hupfeld.de)

### Aufgabe

Wird ein Ausgangskapital  $K_0$  im Jahr mit  $p\%$  verzinst und erfolgen pro Jahr  $n$  Zinszuschläge und steht das Kapital  $t$  Jahre auf dem Konto, so läßt sich das Endkapital nach der Formel:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{p\%}{100 \cdot n}\right)^{nt} \text{ berechnen.}$$

Herr Henning besitzt momentan ein Kapital von 6908,21 EUR. Er erhält 5,4% Zinsen im Jahr und der Zinszuschlag erfolgt einmal im Monat.

- a) Wenn er sein Geld jetzt weiterhin 3 bzw. 7 Jahre zu denselben Bedingungen bei der Bank stehen lassen würde, wieviel Geld würde ihm die Bank dann auszahlen ?
- b) Wie groß muss sein Ausgangskapital gewesen sein, wenn er sein Geld vor 7 bzw. vor 15 Jahren eingezahlt hatte ?
- c) Wie lange muss er sein Geld noch auf der Bank belassen, wenn er anstrebt, dass die Bank ihm mindestens 12000 EUR auszahlen muss ? (Bitte Anzahl der Monate ausrechnen, nach denen das Kapital zum ersten Mal über 12000 EUR liegt).
- d) Frau Arnold zahlt monatlich 150 EUR auf ein Konto ein, ihr Kapital wird jeden Monat mit 6% Jahreszins verzinst. Wieviel Geld wird die Bank ihr nach vollen 5 Jahren auszahlen ?
- e) Eine andere Bank bietet ihr folgende Bedingungen an: Sie zahlt 150 EUR monatlich ein. Die Einzahlungen sollen 5 Jahre erfolgen. Dann bleibt das Kapital ohne weitere Einzahlungen noch ein Jahr bei der Bank. Zu Beginn des 6. Jahres zahlt die Bank 11000 EUR aus. Nehmen Sie monatlichen Zinszuschlag an. Versuchen Sie nun den Prozentsatz, den die Bank bei Auszahlung von 11000 EUR zahlt zu berechnen.

## Lösungen

Teilaufgabe	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse Aufgabe V2.1	Zuordnung und vorgesehene Bewertung		
		I	II	III
a	Sei $q$ der monatliche Verzinsungsfaktor, dann ist $q=1,0045$ Dann erhält er nach 3 Jahren: $6908,21 \cdot 1,0045^{36} = 8120,14$ EUR 7 Jahren: $6908,21 \cdot 1,0045^{84} = 10073,00$ EUR	2 2 2		
b	Es ist die Gleichung $6908,21 = K \cdot 1,0045^{84}$ bzw. $6908,21 = K \cdot 1,0045^{180}$ zu lösen. Man erhält: 4737,73 bzw. 3078,76 EUR.		2 2	
c	Es ist die Ungleichung $12000 \leq 6908,21 \cdot 1,0045^n$ zu lösen. Auflösung ergibt: $\ln(12000/6908,21)/\ln(1,0045) \leq n$ und damit: $122,986 \leq n$ Das entspricht also recht genau 10 Jahren und 3 Monaten.		1 3 1	
d	Es ist eine Formel zur Berechnung zu entwickeln. Dazu müssen die Schüler das Kapital, das ihr die Bank auszahlen würde, für die ersten Monate aufschreiben und dann die Formel verallgemeinern. Das würde dann so aussehen: Nach dem $n$ -ten Monat, vor der neuen Einzahlung: 1. $150 \cdot q$ 2. $150 \cdot q^2 + 150 \cdot q$ usw. ..... 60. $150 \cdot q^{60} + 150 \cdot q^{59} + \dots + 150 \cdot q = 150 \cdot \frac{q^{61} - q}{q - 1}$ Dabei ist $q = 1,005$ in unserem Fall. Die Bank zahlt ihr 10517,80 EUR aus.		7 1 1	
e	Man kann auf d) aufbauen, wenn man es berechnet hat, oder natürlich auch einen neuen Ansatz formulieren. Übernimmt man das Ergebnis aus d) so ergibt sich die zu lösende Gleichung zu: $11000 = 150 \cdot q^{12} \cdot \frac{q^{61} - q}{q - 1}$ . Durch Umformung erhält man: $q^{73} - q^{13} - 73,33 \cdot q - 73,33 = 0$ Die Gleichung lässt sich nicht explizit lösen. Man sieht, dass $q=1$ eine triviale nicht interessierende Lösung ergibt. Die eigentliche Lösung muss durch Probieren herausgefunden werden. Man kann bei genauer Rechnung die Ungleichung finden: $1,004656 < q < 1,004657$ Das entspricht einem Jahreszinssatz von 5,58%.		2 2	2 2
	Summe:	8	18	4
	in %	27	60	13