Schriftliche Abiturprüfung 2001	
3. Prüfungsfach Mathematik	**Fachlehrer H.Hupfeld**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $a \neq 0$ und der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = (x^2 - \frac{2x}{a})e^{ax}$$

a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der Schar durch. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionenschar für a=1 und a=2 in einem sinnvollen Bereich. Charakterisieren Sie die Schar insgesamt.

b) Berechnen Sie die Fläche, die der Graph f_1 (also für a=1) mit der x-Achse zwischen den beiden Nullstellen einschließt. Das läßt sich einerseits mit dem Rechner ausrechnen, aber Sie sollen auch die Integrationsschritte vorrechnen.

c) Sei nun eine Parabelschar g_a gegeben mit der Funktionsgleichung:

$$g_a(x) = a(x^2 - \frac{2x}{a})$$

Charakterisieren Sie die Schar und Zeichnen Sie die Graphen g_1 und g_2 (also für a=1 und a=2).

d) Zeigen Sie, dass f_a und g_a im Normalfall drei Schnittpunkte haben. Rechnen Sie die drei Schnittpunkte für a=2 aus.
Berechnen Sie diejenigen Werte von a, für die sich die Graphen von f_a und g_a nur in zwei Punkten schneiden. Erläutern bzw. interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Ist die zweite Fläche, die der Graph mit der negativen x-Achse einschließt endlich ? Können Sie sie berechnen ?

Lösungen

Teil-auf-gabe	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse zu Aufgabe 1 von Vorschlag 2	Zuordnung und vorgesehene Bewertung I	 II	 III
a	sei $a < 0$; $x \to -\infty$ dann $y \to \infty$ $x \to +\infty$ dann $y \to 0$ sei $a > 0$; $x \to -\infty$ dann $y \to 0$ $x \to +\infty$ dann $y \to \infty$ Wegen des Faktors e^{ax} ist der Graph nicht symmetrisch. Nullstellen liegen bei $x_{n1} = 0$ und $x_{n2} = \frac{2}{a}$ $f'_a(x) = (ax^2-\frac{2}{a})e^{ax}$ $x_{e1} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$ und $x_{e2} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ $y_{e1} = (\frac{2+2\sqrt{2}}{a^2})e^{-\sqrt{2}}$ $y_{e2} = (\frac{2-2\sqrt{2}}{a^2})e^{\sqrt{2}}$ $f_a''(x) = (ax + \sqrt{3} +1)(ax - \sqrt{3} +1)e^{ax}$ $x_{w1} = \frac{\sqrt{3} -1}{a}$ $x_{w2} = \frac{-\sqrt{3} -1}{a}$ $y_{w1} = \frac{(-4\sqrt{3}+6)}{a^2}e^{\sqrt{3}-1}$ $y_{w2} = \frac{(4\sqrt{3}+6)}{a^2}e^{-\sqrt{3}-1}$ Graphen für a=1 und a=2. Charakterisierung der Schar.			
b	Es muss das Integral: $\int_0^2 f_1(x)dx = -4$ berechnet werden. Das kann man mit dem Rechner unmittelbar machen. Es soll aber auch vorgerechnet werden. Dazu berechnet man am Besten zunächst die beiden allgemeinen Integrale: $\int xe^x dx = x \cdot e^x - e^x$ und $\int x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$ über partielle Integration. Dann läßt sich daraus das oben aufgeführte Integral leicht berechnen.			
c	Faktorisierung ergibt: $g(x) = a \cdot x \cdot (x - \frac{2}{a})$ Daraus erkennt man sofort, dass die Nullstellen der Funktion bei $x_{n1} = 0$ und $x_{n2} = \frac{2}{a}$ liegen. Es handelt sich also um eine Schar von Parabeln, deren Scheitelstellen bei $\frac{1}{a}$ liegen. Zeichnung der beiden Graphen.			
d	Es ist folgende Gleichung zu lösen: $x(x-\frac{2}{a})e^{ax} = ax(x-\frac{2}{a})$ Daraus läßt sich schließen, dass beide Funktionen stets bei $x_{s1} = 0$ und $x_{s2} = \frac{2}{a}$ Schnittstellen haben. Außerdem gibt es eine weitere Schnittstelle, wenn die Gleichung $a = e^{ax}$ erfüllt ist. Logarithmierung ergibt: $\ln(a) = ax$ und damit $x_{s3} = \frac{\ln(a)}{a}$. Dieser Ausdruck ist für alle $a > 0$ lösbar. Für a=1 wird dieser Ausdruck Null, so dass bei x = 0 eine doppelte Nullstelle vorliegt. Falls			

	der Ausdruck den Wert $\frac{2}{a}$ annehmen kann, würde auch dort eine doppelte Nullstelle vorliegen, also ist die Gleichung $\frac{\ln(a)}{a} = \frac{2}{a}$ zu lösen. Also ln(a)=2 oder $a=e^2$. In den beiden Fällen, dass a=1 oder $a=e^2$ ist, schneiden sich die Graphen also in einer einfachen Nullstelle und sie berühren sich an einer zweiten Stelle.			

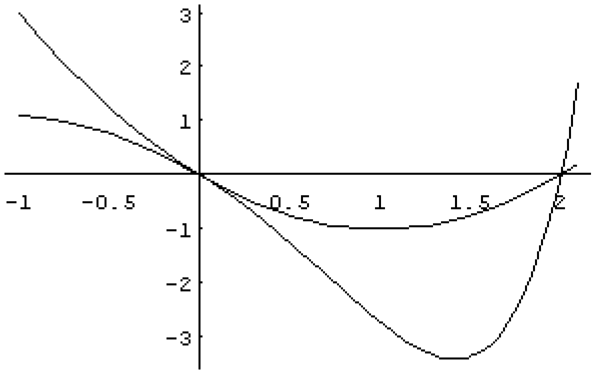
Weitere Erläuterungen:

$$f_a(x) = (x^2 - \frac{2x}{a})e^{ax} \qquad g_a(x) = a(x^2 - \frac{2x}{a})$$

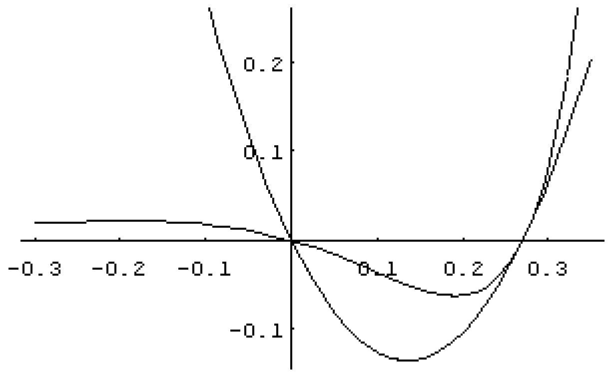
die Sonderfälle für die es nur zwei Schnittpunkte gibt, sind a=1 und $a=e^2$

die Graphen sehen dann so aus:

a=1



$a=e^2=7,389$



zum Vergleich sei hier der Graph für a=2 und a=5 gezeichnet: