Abiturprüfung Frühjahr 1999	Leistungsfach Mathematik
Aufgabe 1	

Es soll in dieser Aufgabe die Ausbreitung einer Infektionskrankheit berechnet werden. Der Einfachheit halber werden folgende Annahmen gemacht:

(1) Es wird nur ein einziger Infizierter in die Population gebracht, deren Umfang N betragen möge.
(2) Bei jedem Kontakt zwischen einem Infizierten und Nichtinfiziertem findet eine Übertragung d.h. Ansteckung statt.
(3) Ein einmal Infizierter bleibt angesteckt, d.h. es scheiden keine Infizierten aus.

Im Folgenden sollen folgende Bezeichnungen verwendet werden:
x(t) oder einfach x sei die Anzahl der Nichtinfizierten zum Zeitpunkt t,
y(t) oder einfach y sei die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt t.
Die Populationsgröße sei N. Dann gilt:

$x(t) + y(t) = N + 1$ und $y' = a \cdot x(t) \cdot y(t)$ oder einfacher geschrieben:

$$x + y = M \quad \text{und} \quad y' = a \cdot x \cdot y \qquad \text{mit} \quad M = N + 1 \quad \text{und} \quad a > 0.$$

a) Erläutern Sie den obigen Ansatz aus zwei Gleichungen zur Berechnung der Ausbreitung einer Infektionskrankheit.
b) Lösen Sie dann das Gleichungssystem und beachten Sie dabei die Anfangsbedingung y(0)=1 und x(0)=N.

(Lösung: $y(t) = \dfrac{N+1}{1 + N \cdot e^{-b \cdot t}}$) mit $b = a \cdot M = a \cdot (N+1)$

c) Zeichnen Sie den Graphen von y für N=350 und b=0,2 für das Intervall: $0 \le t \le 60$ und berechnen Sie Extrem- und Wendepunkte des Graphen. Interpretieren Sie das Gesamtergebnis.
d) Die obige Annahme (3) kann zum Beispiel für Krankheiten wie Typhus gelten. Bei den meisten anderen Krankheiten gilt jedoch, dass die Kranken nach einer gewissen Zeit geheilt werden und dann auch als Infizierte ausscheiden. Wie müsste das obige Gleichungssystem verändert werden, um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen ? Es ist Ihnen auch frei gestellt das Gleichungssystem für verschiedene zusätzliche Bedingungen zu verändern.