

Der Anteil $q = 1-p$ der Bevölkerung einer Stadt habe eine Krankheit, bei der sich die Krankheitserreger im Blut befinden, und die deshalb durch Blutuntersuchungen nachgewiesen werden kann. Da die Blutuntersuchungen teuer sind, andererseits die Krankheit sehr gefährlich ist, soll nach einem Verfahren gesucht werden, das sicher stellt, dass alle Kranken erkannt und behandelt werden können und das andererseits möglichst billig ist, d.h. möglichst wenige Untersuchungen erfordert.

Es sollen nun zwei mögliche Verfahren, alle Kranken zu ermitteln, miteinander verglichen werden.

Verfahren 1: Jedes Individuum wird einzeln untersucht.

Verfahren 2: Es werden die Blutproben von m Personen miteinander vermischt und die Mischung auf Krankheitserreger hin untersucht. Falls sich Erreger im Blut befinden, werden die m Blutproben zusätzlich einzeln untersucht.

a) Es seien 4% der Bevölkerung einer Kleinstadt von 20000 Einwohnern befallen. Berechnen Sie, wie viele Untersuchungen in diesem Falle bei beiden Verfahren zu erwarten wären, wenn man $m = 10$ wählen würde. Gibt es bei Verfahren 2 eine Ersparnis gegenüber Verfahren 1? Wenn ja, dann geben Sie die prozentuale Ersparnis bei Verfahren 2 an. Wenn nein, begründen Sie warum nicht.

b) Bearbeiten Sie diesen Aufgabenteil zunächst für den Fall $m = 10$ und anschließend für m allgemein.

Sei X_m die Zufallsgröße: Anzahl der notwendigen Untersuchungen pro untersuchter Gruppe nach Verfahren 2. Zeigen Sie, daß der Ergebnisraum von X_m : $\Omega = \{1, m + 1\}$ ist. Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion von X_m und zeigen Sie, daß der Erwartungswert von X_m :

$$E(X_m) = m + 1 - mp^m$$

ist.

c) Zeigen Sie, daß die Ersparnis $D(m)$ *pro Person* $D(m) = p^m - 1/m$ beträgt.

Wie groß müßte m in b) gewählt werden, damit die Ersparnis maximal wird ?

Wie groß darf p höchstens werden, damit bei Verfahren 2 noch eine Ersparnis auftritt ?

Berechnen Sie eine Näherungslösung für p mit dem Taschenrechner.

d) Überlegen Sie, ob es Wege gibt, das Verfahren 2 noch zu verbessern.