Abiturprüfung Frühjahr 2005 Leistungsfach Mathematik
Aufgabe 2 (www.helmut-hupfeld.de)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|1|-1)$, $B_t(-1|2|2t+1)$ und $C_t(5|3t+1|-1)$ gegeben mit reellem t.

$\vec{a}, \vec{b}_t \vec{c}_t$ seien die zugehörigen Ortsvektoren.

a) Zeigen Sie, dass die drei Ortsvektoren zu A, B_t und C_t linear unabhängig sind.
Prüfen Sie, ob sich ein Wert für t so finden lässt, dass die drei Ortsvektoren paarweise orthogonal zueinander sind.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_t in der A, B_t und C_t liegen in Koordinatenform.
Untersuchen Sie für welche Werte von t E_t parallel zu (mindestens) einer der Koordinatenachsen ist.
Für welche Werte von t ist E_t parallel zu einer der Koordinatenebenen?

c) Die Punkte A, B_t und C_t bilden zusammen mit dem Nullpunkt eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie deren Volumen V(t) in Abhängigkeit von t und zeigen Sie, dass es eine Pyramide mit minimalem Volumen gibt.

	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	Zuordnung und vorgesehene Bewertung I	II	III
2a	lineare Unabhängigkeit nachweisen		3	
	Ansatz für paarweise Orthogonalität		3	
	Lösung t=1		1	
2b	Gleichung für die Ebene in Parameterform	3		
	Umrechnung in die Koordinatenform		3	
	$(t^2+t)x-(2t+2)y+z+t^2+3t+3=0$			
	Ansatz für Parallelität zu den Koordinatenachsen	2	2	
	zur z-Achse ist keine Parallelität möglich			1
	für t=0 ; t=-1 ist die Ebene parallel zur x-Achse	2		
	für t=-1 ist sie parallel zur y-Achse	1		
	für t=-1 ist sie parallel zur xy-Ebene		1	
2c	$V=\frac{1}{6}\left|(a*b_t)\cdot c_t\right| = 6t^2 + 18t + 18$		3	
	$V'=12t + 18$; $t_{ex}=-1,5$	2		
	$V_{min}=2,25$ VE	1		
	Summe der Punkte in dieser Aufgabe:	11	16	1