Abiturprüfung Frühjahr 1999	Leistungsfach Mathematik
www.helmut-hupfeld.de	

Es soll das Zufallsexperiment: Schießen eines Sportschützen auf eine Zielscheibe untersucht werden. Die Zufallsgröße X sei dabei: Abstand des Treffers vom Zentrum. Es ist bekannt, dass solch eine Zufallsgröße einer RAYLEIGH-Verteilung folgt. Die Dichtefunktion einer sochen Verteilung lautet:

$$f(x) = A \cdot x \cdot e^{-h^2x^2} \qquad \text{mit } x \geq 0$$

dabei ist x:= Abstand des Treffers vom Zentrum,
h:= eine für den jeweiligen Schützen spezifische Konstante,
A:= ebenfalls eine Konstante.

a) Zeigen Sie, dass $A = 2 \cdot h^2$ sein muss, wenn f eine Dichtefunktion sein soll.

b) Berechnen Sie den Modalwert der Dichtefunktion und zeichnen Sie den Graphen der Funktion für h=0,2. (Lösung: $M = 5 \cdot \sqrt{2}$).

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X, d.h. berechnen Sie das Integral:

$$F(x) = 2 \cdot h^2 \cdot \int_0^x te^{-h^2t^2}\,dt \qquad \text{(Lösung: } F(x) = 1 - e^{-h^2x^2}\text{)}$$

d) Der Erwartungswert der Verteilung berechnet sich nach der Formel:

$$\mu = E(X) = 2 \cdot h^2 \cdot \int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2}\,dx \qquad \text{(Lösung: } \mu = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2h}\text{)}$$

Berechnen Sie diesen Erwartungswert.

e) Die Varianz der Verteilung läßt sich nach einer der beiden Formeln berechnen:

$$\sigma^2 = V(X) = 2 \cdot h^2 \cdot \int_0^\infty x^3 e^{-h^2x^2}\,dx - E^2(X) \qquad \text{(Lösung: } V(X) = \frac{4-\pi}{2h^2}\text{)}$$

$$\sigma^2 = V(X) = 2 \cdot h^2 \cdot \int_0^\infty (x-\mu)^2 xe^{-h^2x^2}\,dx$$

Berechnen Sie die Varianz nach einer dieser Formeln.

	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	Zuordnung und vorgesehene Bewertung I	II	III
a	Es muss das Integral: $A \cdot \int_0^\infty r \cdot e^{-h^2r^2}\,dr = 1$ berechnet werden. Dazu muss die Substitution $z=-h^2r^2$ vorgenommen werden. Substitutionsintegrationen sind relativ gut eingeübt, weshalb dieser Aufgabenteil als normal schwere Transferaufgabe angesehen werden kann. Die Lösung ergibt $A=2h^2$.			
b				