Lk	Mathematik-Klausur Nr.2	12

Fachlehrer: www.helmut-hupfeld.de	Datum: 15. Dezember 2003

Aufgabe 1

a) Polonium ^{210}P hat eine Halbwertszeit von 138,5 Tagen. Wieviel Prozent sind nach 10, 20 und 30 Tagen zerfallen ?

b) Eine Stadt hatte im Jahre 1995 311645 Einwohner. 1978 waren es noch 278452 gewesen.
Berechnen Sie wieviele Einwohner die Stadt 1982 und 1986 hatte, wenn man davon ausgeht, dass das Wachstum exponentiell erfolgte.
Wieviele Einwohner wird die Stadt 2005 haben, wenn das Wachstum so weitergeht ?

c) Das Uranisotop ^{235}U hat eine Halbwertszeit von $707 \cdot 10^6$ Jahren, das Uranisotop ^{238}U eine Halbwertszeit von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren. Das Verhältnis von $^{238}U/^{235}U$ beträgt 137,8. Man nimmt an, dass das Verhältnis ursprünglich 1 betrug. Welches Alter von Uran (man nimmt an, dass das das Alter der Erde ist) ergibt sich hieraus ?

Aufgabe 2

a) Bei der Geburt eines Kindes soll ein Betrag zu 5,2% Zinsen so festgelegt werden, dass nach Vollendung seines 18. (der Jugendliche wird 18) Lebensjahres 45000 € ausgezahlt werden. Wie hoch muss die Einzahlung sein, wenn sie
(1) in einer einmaligen Einzahlung,
(2) in monatlichen Raten bis zur Auszahlung,
(3) in monatlichen Raten, in den ersten 5 Jahren (danach keine weiteren Einzahlungen) erfolgen soll ?
Versäumen Sie es nicht, Ihre Rechnungen zu erläutern !

b) In einer abgeschlossenen Meeresbucht werden 600 Fische ausgesetzt, die sich nach 10 Jahren zu 6000 Fischen vermehrt haben. Setzt man exponentielles Wachstum voraus, wie viele Fische können dann pro Jahr abgefischt werden, damit sich die vorhandenen Fische nicht weiter vermehren ?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit der Funktionsgleichung :

$$f_a(x) = xe^{\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 2ax}$$

a) Untersuchen Sie, wie der Graph der Funktion für x -> ±∞ verläuft. Prüfen Sie, ob der Graph der Funktion symmetrisch ist.

b) Zeigen Sie (ohne Verwendung des TI), dass sich die erste Ableitung von f_a folgendermaßen schreiben lässt:

$$f_a'(x) = (x+1)[x^2 + (2a-1)x + 1]e^{\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 2ax}$$

c) Untersuchen Sie, für welche Werte für a wie viele Null- und Extremstellen existieren. Skizzieren Sie ausgewählte Graphen der Schar (Keine weitere Diskussion).

Aufgabe 4

a) Führen Sie mit der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = e^{ax - \frac{1}{2}x^2}$$

eine vollständige Kurvendiskussion durch. Zeichnen Sie exemplarisch die Graphen für a=-1 und a=2.

b) Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a symmetrisch zur Geraden $x=x_H$ sind, wobei x_H die x-Koordinate des Hochpunktes ist.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Tangenten, die vom Ursprung an die Graphen von f_a in Abhängigkeit von a gelegt werden können. Zeichnen Sie die entsprechenden Geraden in die in a) angefertigte Zeichnung ein.

d) Durch welche Punkte der x-Achse (in Abhängigkeit von a) gibt es keine Tangenten an den Graphen von f_a ? Erläutern Sie das an der Skizze zu den Graphen.

e) Untersuchen Sie in welcher Beziehung die Graphen von f_a zum Graphen der Funktion g stehen .

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck $(1 + \sqrt{2})^m$ in der Form $a + b\sqrt{2}$ schreiben lässt (a und b sollen hier nicht berechnet werden).

b) Zeigen Sie, dass $(1 - \sqrt{2})^m = a - b\sqrt{2}$ ist und zwar mit denselben Zahlen a und b wie in a).

c) Zeigen Sie für m=3, dass a und b die Werte in der Tabelle annehmen. Berechnen Sie a und b dann für m=6,7,8 und tragen Sie die Ergebnisse in die Tabelle unten ein. Erläutern Sie, wie Sie die Ergebnisse erhalten haben.

d) Wenn man $(1 + \sqrt{2})^m$ ausrechnet, ergibt sich folgende Tabelle:

m in:	$(1 + \sqrt{2})^m$	gerundet
	$a + b\sqrt{2}$	
2	$3 + 2\sqrt{2}$	5,82
3	$7 + 5\sqrt{2}$	14,07
4	$17 + 12\sqrt{2}$	33,97
5	$41 + 29\sqrt{2}$	82,01
6		
7		
8		

Vergleichen Sie a, b und das reelle Gesamtergebnis. Fällt Ihnen an dem Ergebnis etwas auf ?

d) Versuchen Sie zu zeigen, dass $(1 + \sqrt{2})^{2m}$ immer etwas kleiner als eine gerade Zahl ist und $(1 + \sqrt{2})^{2m+1}$ immer etwas größer als eine gerade Zahl ist.

$f_a(x) = e^{ax-x^2/2}$ und $g(x) = e^{-x^2/2}$