Übungsaufgaben – Analysis – Teil 1

www.helmut-hupfeld.de

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{x^4}{5} - \frac{2}{5}x^3 - \frac{31}{20}x^2 + \frac{7}{4}x$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion und fertigen Sie eine grobe Zeichnung des Graphen an.
b) Berechnen Sie die Extrema und die Wendepunkte des Graphen.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Wendetangenten und den Schnittpunkt der beiden Wendenormalen und berechnen Sie den Flächeninhalt des Viereckes, das sich dabei ergibt.
d) Ist der Graph symmetrisch ? Falls Sie eine Vermutung dazu haben, sagen Sie wie man sie beweisen könnte und führen das aus.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit der Funktionsgleichung :

$$f_a(x) = \frac{1}{6a}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}ax \qquad x \in R, \quad a \in R^+.$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen und Extrem- und Wendepunkte der Funktionenschar. Zeichnen Sie für a=3 den Graphen der zugehörigen Funktion f_3 im Bereich $-1 \leq x \leq 12$ (LE: 1 cm).
b) Die y-Achse, die Wendetangente und die Verbindungsgerade des Wendepunktes mit dem Ursprung bilden ein Dreieck. Zeigen Sie für allgemeines a, daß dieses Dreieck durch den Graphen von f_a in zwei gleichgroße Flächen zerlegt wird.
c) Zeigen Sie, dass die Normale im Wendepunkt W die Gleichung:

$$n(x) = \frac{2}{a}x - 4 + \frac{1}{3}a^2 \qquad \text{hat.}$$

(Sie steht auf der zugehörigen Wendetangente senkrecht)

Diese Gerade schneidet die y-Achse in V. Die Parallele zur x-Achse durch V und die Parallele zur y-Achse durch W bilden mit dem Koordinatensystem ein Rechteck. Für welchen Wert von a im Bereich: $0 < a < 2\sqrt{3}$ ist der Umfang des Rechteckes am größten ?
Gegen welchen Wert strebt der Umfang, wenn die x-Koordinate des Wendepunktes W gegen 0 bzw. gegen $4\sqrt{3}$ strebt ?

Aufgabe 3

Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Parabel 4. Ordnung. Die Funktion hat in N(0/0) eine waagerechte Tangente. Der Ursprung ist gleichzeitig Wendepunkt. Die Funktion hat in P(-1/-2) einen Tiefpunkt.

Übungsaufgaben Analysis Teil 2

1. Berechnen Sie die Untersumme für folgenden Funktionen zu den angegebenen Intervallen:
   a) $f(x)=2x^2+2$ [1;2] b) $g(x)=x^3-x$ [0;1] c) $h(x)=x^3 -2x^2$ [1;2]
   Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt über eine Integration der Funktion.
2. Faktorisieren Sie folgende Funktionsgleichungen:
   a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$
   b) $f(x) = x^2 - 7x + 10$
   c) $f(x) = x^2 + 3x + 8$
   d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$
   e) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ $x = 2$
   f) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x + 60$ $x = 5$
   h) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$ $x=-5$, $x=2$
   i) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 4x + 20$
   j) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 + 24x + 36$ $x=2$, $x=-3$,
3. Berechnen Sie für die Funktionen in 2e und 2f den Flächeninhalt, den die Graphen mit der x-Achse einschließen.
4. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen:
   $f(x)=1/3*(x-x^2)$ und $g(x)=4x^3-11/3*x^2+x/3$
   Berechnen Sie dann den Flächeninhalt, den die beiden Graphen miteinander einschließen.
5. Gegeben seien die Funktionenschar f_p und die Funktion g mit den Funktionsgleichungen:

   $$f_p(x) = px - px^2 \quad \text{und } g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   Beschreiben Sie die Funktionenschar f_p.
   Seien x_{n1} und x_{n2} die beiden Nullstellen von f_p mit $x_{n1} \leq x_{n2}$.
   Bestimmen Sie in g die Koeffizienten so, dass x_{n1} und x_{n2} ebenfalls Nullstellen von g sind und dass sich die beiden Graphen in $(x_{n2}/0)$ orthogonal schneiden und in $(x_{n1}/0)$ berühren.
   Beweisen Sie, dass g eine dritte Nullstelle hat und dass diese immer zwischen 0 und 1 liegen muss.
   Diskutieren Sie die Lage der beiden Graphen zueinander.
   Berechnen Sie die beiden Werte von p für die die Fläche, die zwischen den beiden Graphen liegt den kleinsten und den größten Flächeninhalt besitzt.