Zum binomischen Lehrsatz: [www.helmut-hupfeld.de]

Wir multiplizieren $(a + b)^n$ aus und setzen zunächst:

$(a + b)^n = k_0a^n + k_1a^{n-1}b + k_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots. k_ia^{n-i}b^i + \ldots.. + k_nb^n$

Dabei sollen die k_i (Binomialkoeffizienten) mit $0 \le i \le n$ die gesuchten Faktoren für die entsprechenden Summanden sein. Diesen Faktoren geben wir die Darstellung (zu lesen: n über i):

$$k_i = \binom{n}{i}$$

Diese k_i müssen nun berechnet werden. Um Zusammenhänge den Binomial-koeffizienten herzustellen, multipliziere ich $(a + b)^n$ mit (a+b) bzw. zunächst mit a und dann mit b und addiere die beiden Zeilen:

$$\begin{array}{rl}
a\cdot(a + b)^n = & \binom{n}{0}a^{n+1} + \ldots.. \binom{n}{1}a^nb + \ldots\ldots\ldots\ldots. \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \ldots\ldots\ldots\ldots. \binom{n}{n}ab^n \\
+b\cdot(a + b)^n = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \binom{n}{0}a^nb + \ldots\ldots\ldots\ldots \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k \ldots\ldots\ldots \binom{n}{n-1}a^1b^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
\text{--------------} & \text{------------------------------------} \\
(a + b)^{n+1} = & \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \ldots\ldots.. \binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots.. \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{array}$$

Schreibt man die Binomialkoeffizienten in einer Tabelle auf, so ergibt sich das sogenannte Pascalsche Dreieck. Dieses sieht für die Werte n und k bis 7 so aus (1. Spalte: n, 1.Zeile:n über k, fett gedruckt)

n	**n 0**	**n 1**	**n 2**	**n 3**	**N 4**	**n 5**	**n 6**	**n 7**
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	*35*	21	7	1

2. Spalte: $\binom{n}{0} = 1$

3. Spalte: $\binom{n}{1} = n$

4. Spalte: $\binom{n}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$

Die Hervorhebungen in der Tabelle deuten an, dass man 7 über 4 als Summe der Werte von 3 über 3 bis 6 über 3 erhält.
Aus der 2. Spalte (n über 0) entnimmt man, dass hier stets der Wert 1 steht. In der 3. Spalte (n über 1) erkennt man, dass hier stets n steht.
Ab der 4. Spalte müssen wir rechnen. Das Ergebnis für n über 2 ist in der Tabelle oben rechts ausgerechnet und dargestellt.
n über 3 können wir nun herleiten, indem wir unsere Kenntnis von n über 2 ausnutzen oder auch direkt durch eine Doppelsumme:

$$\binom{n}{3} = \sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad \binom{n}{3} = \sum_{m=1}^{n-2}\sum_{k=1}^{m} k$$

Die Entwicklung der Formeln lässt sich leicht verallgemeinern und man kann vermuten, dass folgende Formel allgemein gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Aufgabe: Leiten Sie nun n über 4 auf verschiedene Arten her (Sie kennen n über 2 und n über 3). Hinweis: Einfache, doppelte, dreifache Summe.

Eine zweite Herleitung der Binomialkoeffizienten

Wir wollen nun die Binomialkoeffizienten noch durch Ausmultiplizieren bestimmen.
Dazu schreiben wir die Formel in folgender Weise auf:
$(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b).........(a + b)$ [n Faktoren]
Beim Ausmultiplizieren muss nun aus jeder Klammer genau ein Faktor kommen. Wir haben es also mit lauter Faktoren der Form aabbaab....aba usw. zu tun. Dabei stehen n Faktoren nebeneinander und die Anzahl der Faktoren von a und die Anzahl der Faktoren von b ergibt zusammen n.
Ausmultipliziert müssen wir $2 \cdot 2 \cdot .... \cdot 2 = 2^n$ einzelne Summanden erhalten. Dabei können immer alle Summanden, die die gleichen Exponenten enthalten zusammengefasst werden. Man muss sich also fragen: Wieviele Summanden von der Form $a^{n-i}b^i$ gibt es für jedes $0 \leq i \leq n$?
Dazu stellen wir folgende Überlegung an:
Wir schreiben für die n Faktoren n leere Plätze auf. Aus diesen wählen wir i Plätze aus, um dort den Faktor b hineinzuschreiben. Die restlichen Plätze werden mit dem Faktor a gefüllt. Für den ersten Platz von b gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten nur noch (n-1) Möglichkeiten usw.
Für die Auswahl der i Plätze gibt es also insgesamt:
$n(n-1)(n-2)(n-3).......(n-i+1)$ Möglichkeiten. Da es allerdings gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die i Plätze gewählt werden, (ob wir z.B. die Plätze 3, 7, 18 in dieser Reihenfolge wählen oder in der Reihenfolge 7, 3, 18 wählen, in beiden Fällen sind dieselben Plätze belegt), müssen wir die obige Zahl noch durch die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten dividieren. Man kann nun i Gegenstände auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 ..... \cdot i = i!$ Möglichkeiten anordnen bzw. vertauschen.
Daher ergibt sich für den Binomialkoeffizienten von $a^{n-k}b^k$:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Die zweite Form der Darstellung rechts ergibt sich durch Erweiterung des Bruches mit dem Faktor (n-k)!

Aufgaben: Beweisen Sie nun folgende Zusammenhänge:

a) Es gilt: $$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

b) Es gilt: $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

c) weiter: $$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}}$$