Versiera der Agnesi

Die folgende Kurve ist unter dem Namen *Versiera der Agnesi* bekannt geworden. Ein Punkt der gesuchten Kurve wird wie folgt konstruiert:

- zeichne den Kreis k um $M(0,1)$ mit dem Radius $R=1$,
- zeichne die Parallele p zur x-Achse durch den Punkt $P(0,2R)$
- zeichne eine Gerade g durch den Ursprung $O(0,0)$ mit positiven Anstieg
- g schneidet k in V
- g schneidet p in U
- der Punkt $E(U,V)$ ist ein Punkt der gesuchten Kurve

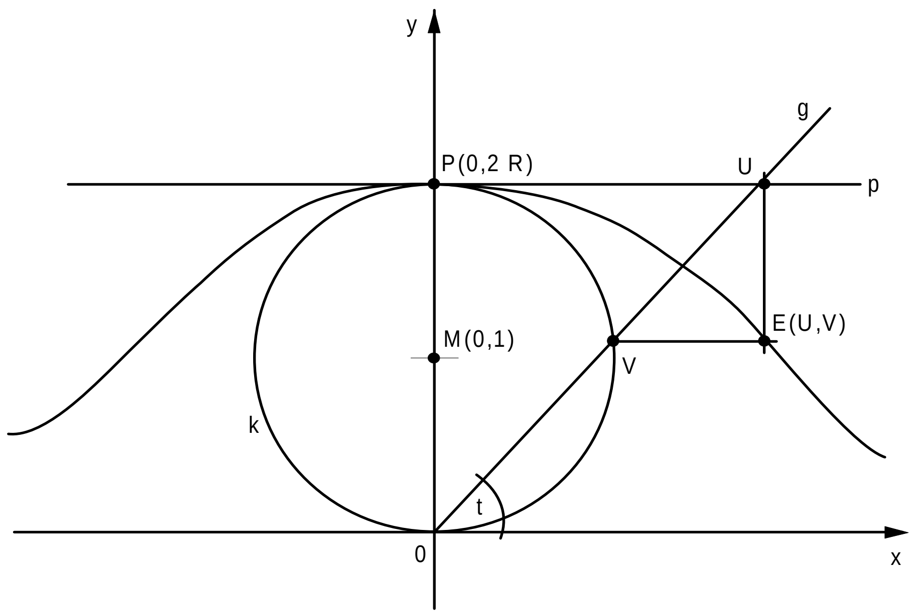

Abbildung 1: Konstruktion der Kurve *Versiera der Agnesi*

1. Leiten Sie aus der Konstruktionsvorschrift eine Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ für die Kurve ab !
2. Berechnen Sie die Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall $-\infty < x < +\infty$!
3. Eliminieren Sie den Parameter t aus den Gleichungen $x(t), y(t)$ und leiten Sie eine explizite Darstellung der Form $y = f(x,a)$ her, wobei $2\,R = a$ gilt.

Parameterdarstellung der Kurve

Der Radiusvektor r der den Kreis k beschreibt lautet in Polarkoordinaten:

$$r(t) = 2\ R\ \sin(t) \tag{1}$$

Zerlegt man r in seinen $x-$ und $y-$ Anteil erhält man die Parameterdarstellung von k:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= r(t)\ \cos(t) = 2\ R\ \sin(t)\ \cos(t) && (2) \\ y_k(t) &= r(t)\ \sin(t) = 2\ R\ \sin^2(t) && (3) \end{aligned}$$

Die Funktion $y_k(t)$ ist identisch mit der Koordinate V aus Abbildung 10. Die x-Koordinate folgt aus den trigonometrischen Beziehungen im Dreieck:

$$\tan(t) = \frac{2\ R}{x(t)} \qquad x(t) = 2\ R\ \cot(t) \tag{4}$$

Somit lautet die gesuchte Parameterdartstellung für die Kurve:

$$\boxed{x(t) = 2\ R\ \cot(t), \qquad y(t) = 2\ R\ \sin^2(t), \qquad 0 \le t \le \pi} \tag{5}$$

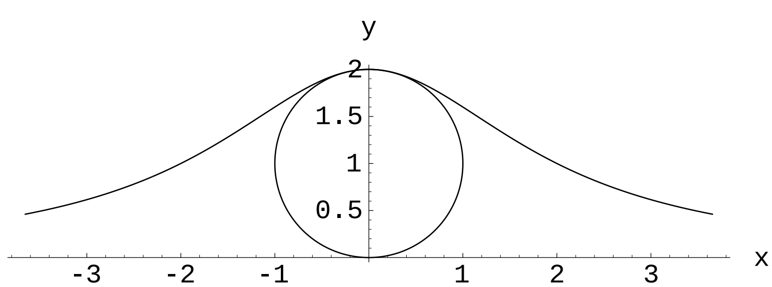

Abbildung 2: Kreis k und die Kurve *Versiera der Agnesi*

Flächenberechnung

Zur Flächenberechnug für Kurven in Parameterdarstellung kann vorteilhaft die *Leibnizsche Sektorenformel* genutzt werden.

$$A = \frac{1}{2} \int (x\,\dot{y}\ -\ \dot{x}\,y)\ dt \tag{6}$$

Die Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nach dem Parameter t lauten:

$$\dot{x} = -\frac{2\ R}{\sin^2(t)}\,, \qquad\qquad \dot{y} = 4\ R\ \sin(t)\ \cos(t) \tag{7}$$

Die Integrationsgrenzen für den Parameter t ergeben sich aus folgender Grenzwertbetrachtung für $x(t)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\ R\ \cos(t)}{\sin(t)} = +\infty \qquad\qquad \lim_{t\to \pi} \frac{2\ R\ \cos(t)}{\sin(t)} = -\infty \tag{8}$$

Um über das x-Intervall von $-\infty < x < +\infty$ zu integrieren genügt es den Parameter t von $0 \ldots \pi$ laufen zu lassen.

$$A = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1=0}^{t_2=\pi} \left(8\ R^2\ \cos^2(t) + 4\ R^2\right)\ dt \tag{9}$$

$$A = 2\ R^2 \int\limits_{t_1=0}^{t_2=\pi} \left(2\ \cos^2(t) + 1\right)\ dt \tag{10}$$

$$A = 2\ R^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\pi} \tag{11}$$

$$A = 4\ \pi\ R^2 \tag{12}$$

Das Ergebnis ist in zweierlei Hinsicht bemerkenswert:

- der Flächeninhalt ist endlich obwohl die Kurve nur asymptotisch sich der x-Achse nähert
- die Maßzahl entspricht genau dem vierfachen Kreisflächeninhalt

Explizite Kurvengleichung

Die Paramterdarstellung $x(t)$ wird wie folgt umgeformt, wobei $2R = a$ gilt:

$$x(t) = 2\,R\,\cot(t) \quad \rightarrow \quad x^2(t) = a^2\,\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \tag{13}$$

Die Gleichung für $y(t)$ liefert:

$$\sin^2(t) = \frac{y}{a} \qquad \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) = 1 - \frac{y}{a} \tag{14}$$

Die Sinus- und Cosinusfunktion kann damit in $x^2(t)$ ersetzt werden:

$$x^2(t) = a^2\,\frac{1 - \frac{y}{a}}{\frac{y}{a}} \quad \rightarrow \quad x^2(t) = a^2\,\frac{a - y}{y} \tag{15}$$

Die explizite Funktionsdarstellung der *Versiera der Agnesi* lautet damit:

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad a = 2\,R \tag{16}$$

Lösung von *Felix Wolfheimer, Rosbach*

Parameterdarstellung

Die x-Koordinate folgt aus dem Schnittpunkt von g mit der Geraden $y = p = 2 \cdot R$:

$$y = 2 \cdot R = \tan(t) \cdot x \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{2 \cdot R}{\tan(t)} \tag{17}$$

Die Funktion $y(t)$ folgt aus dem Schnittpunkt ziwschen Kreisgleichung und Geradengleichung:

$$k: \qquad R^2 = x^2 + (y-R)^2, \qquad g: \qquad x = \frac{y}{\tan(t)} \tag{18}$$

$$R^2 = \frac{y^2}{\tan^2(t)} + y^2 - 2 \cdot R \cdot y + R^2 \tag{19}$$

$$0 = y^2 \cdot \left[\frac{1}{\tan^2(t)} + 1\right] - 2 \cdot R \cdot y \quad \rightarrow \quad y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = 2 \cdot R \cdot \sin^2(t) \tag{20}$$

Die Lösung $y_1(t)$ entspricht dem Schnittpunkt im Koordinatenursprung. Für uns ist $y_2(t)$ die richtige Lösung.

Flächenberechnung

$$F = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot dx(t), \qquad y(t) = 2 \cdot R \cdot \sin^2(t) \tag{21}$$

$$x(t) = \frac{2 \cdot R}{\tan(t)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2 \cdot R}{\sin^2(t)} \tag{22}$$

Die Integrationsgrenzen für den Parameter t ergeben sich aus folgender Grenzwertbetrachtung für $x(t)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{2\ R\ \cos(t)}{\sin(t)} = +\infty \qquad\qquad \lim_{t \to \pi} \frac{2\ R\ \cos(t)}{\sin(t)} = -\infty \tag{23}$$

Um über das x-Intervall von $-\infty < x < +\infty$ zu integrieren genügt es den Parameter t von $0 \ldots \pi$ laufen zu lassen.

$$F = -\int\limits_0^{\pi} 2 \cdot R \cdot \sin^2(t) \cdot \left(-\frac{2 \cdot R}{\sin^2(t)}\right) \cdot dt = \int\limits_0^{\pi} 4 \cdot R^2 \cdot dt = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \tag{24}$$