Albrecht Dürer und die Mathematik der Renaissance

- die Konstruktion der Muschellinie

ein Beitrag von Ingmar Rubin, Berlin

Abbildung 1: Selbstbildnis mit Landschaft, Albrecht Dürer (1471 - 1528)

Inhaltsverzeichnis

1 Die Mathematik der Renaissance

Abbildung 2: Die Melancholie (Melencolia I), A.Dürer, Kupferstich 1514

Zu den bedeutendsten Mathematikern der Renaissance zählen Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer (1471 - 1528). Der Öffentlichkeit sind beide jedoch vorrangig als Künstler bekannt. Am interessantesten aus mathematischer wie auch aus kunsttheoretischer Sicht ist sicher der Kupferstich *Melancholie*. Das Werk strotzt vor mathematischen Bezügen. Neben der Abbildung eines magischen Quadrates, Instrumenten zur Konstruktion und der perspektivischen Darstellung kann man in die gedankenversunkene Engelsgestalt durchaus das resignierende Nachsinnen über schwierige mathematische Probleme hinein interpretieren.

2 Konstruktion der Muschellinie

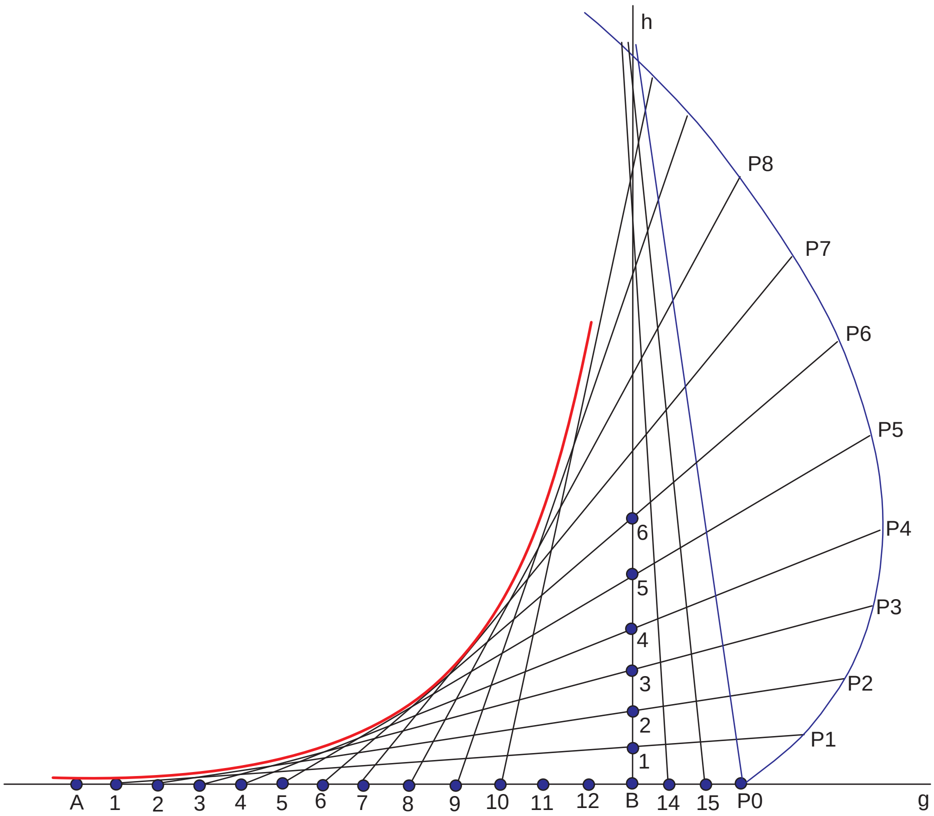

Abbildung 3: Konstruktion der Muschellinie

In Dürers grundlegenden Werk *Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen und gantzen Corporen...* finden wir eine Konstruktionszeichnung dieser Kurve (Abb. 3). Bei der Nachstellung der folgenden Konstruktion ist die Benutzung von Millimeterpapier oder zumindest karierten Papier sinnvoll - auch wenn es das zu Dürers Zeiten noch nicht gab. Der Konstruktionstext zu Abbildung 3 lautet:

```
- zeichne eine waagerechte Gerade g
- markiere auf g zwei Punkte A, B im Abstand von AB = 13cm
- errichte in B die Senkrechte zu g und bezeichne sie mit h
- skaliere die Gerade g von A beginnend in Abstaenden zu 1 cm,
  bezeichne die Skalenstriche mit 1,2,3 usw.
- skaliere die Gerade h von B beginnend in Abstaenden zu 1 cm,
  bezeichne die Skalenstriche mit 1,2,3 usw.
- zeichne Hilfsgreaden von g beginnend ueber h hinaus
  in dem 1 auf g mit 1 auf h, 2 auf g mit 2 auf h
  usw. verbunden werden
```

```
- trage mit dem Zirkel von g aus, auf den Hilfsgeraden
  den festen Abstand r=16cm ab
- bezeichne die Endpunkte auf den Hilfsgeraden
  mit P1, P2, P3 ... P16
- trage von A aus die Strecke r=16cm auf g ab und
  bezeichne den Punkt mit P0
- verbinde die Punkte P0 ... P16 zur gedachten Muschellinie
```

3 Aufgabenstellungen

1. Konstruiere die Muschellinie mit einem Programm der dynamischen Geometrie deiner Wahl z.B Euklid, ZuL, GeoGebra. Nutze dazu die Funktion zum Aufzeichnen einer Ortskurve. Variiere den Parameter a und beschreibe was sich verändert.

2. Leite aus der Konstruktionszeichnung eine Paramterdarstellung $x(t), y(t)$ der Kurve ab.

3. Plotte die Kurve mit einem Programm deiner Wahl.

4. Zeichne wenn möglich mehrere Kurven für verschiedene Werte von a in ein Diagramm (Kurvenschar).

5. Für $a = 13$ und $r = 16$ ergibt sich eine Überschneidung der Kurve (Schleife) im 1.Quadranten. Weiterhin schneiden sich der untere und obere Kurvenast im 3.Quadranten. Zeige dass die Schnittpunkte auf der Geraden $y = x$ liegen für beliebige $a > 0, r > 0$ (nach einer Idee von *Thomas Thrun und Willy Stirn*)

6. Für $a = 13$ und $r = 16$ ergibt sich eine Überschneidung der Kurve (Schleife) im 1.Quadranten. Ermittle den Flächeninhalt der Schleife.

7. Bestimme die einhüllende Kurve der Geradenschar (siehe rote Kurve in Abbildung 3)

4 Konstruktion mit dem Programm Euklid

Wir benutzen das Programm Euklid das im Internet unter *www.dynageo.de* zu finden ist. Der Konstruktionstext in Euklid lautet:

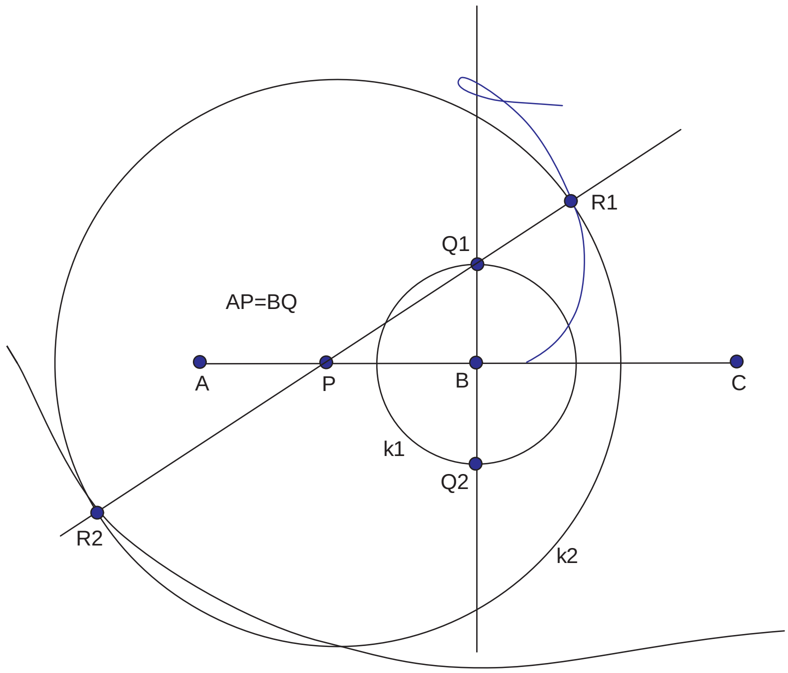

Abbildung 4: Konstruktion der Muschellinie in Euklid

```
A  ist ein freier Basispunkt
C  ist ein freier Basispunkt
s1  ist die Strecke  [ A ; C ]
B  ist ein Basispunkt, der an s1 gebunden ist.
g1  ist das Lot von B auf  s1
P  ist ein Basispunkt, der an s1 gebunden ist.
k1  ist ein Kreis mit Mittelpunkt B und Radius d(A;P) cm
Q1  ist ein Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
Q2  ist der 2. Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
g2  ist die Gerade  ( P ; Q1 )
k2  ist ein Kreis mit Mittelpunkt P und Radius 6 cm
R1  ist ein Schnittpunkt der Linie g2 mit dem Kreis k2
R2  ist der 2. Schnittpunkt der Linie g2 mit dem Kreis k2
OL1  ist eine Ortslinie des Punktes R1, wenn P gezogen wird
OL2  ist eine Ortslinie des Punktes R2, wenn P gezogen wird
```

Wenn der Punkt B auf der Geraden AC bewegt wird ändert sich der Parameter a. Bewegen wir B nach rechts wird die Schleife im oberen Kurvenast zunehmend kleiner und verschwindet schließlich bei $a = r$. Umgekehrt vergrößert sich die Schleife und bricht schließlich bei $a = 0$ in eine Gerade auf.

5 Parameterdarstellung der Kurve

5.1 Schnittmenge aus Geradengleichung und Kreis

Im ersten Teil der Lösung werden wir die gesuchte Kurve als Schnittmenge zwischen einer Geraden und einem Kreis bestimmen. Wir nutzen dazu die Methoden der analytischen Geometrie.

Wir denken uns Punkt A im Ursprung eines rechtwinklig, kartesischen Koordinaten-

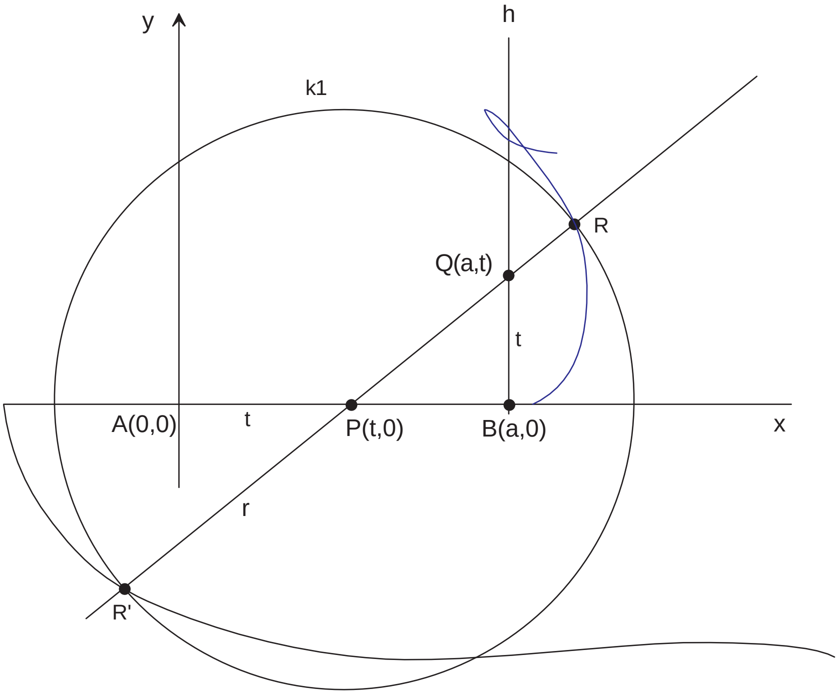

Abbildung 5: Geradengleichung durch P und Q

systems. Bezeichne $a = \overline{AB}$ die Distanz zum Punkt B. Sei t ein freier Parameter mit $0 \leq t \leq \infty, t \in R$. Sei $P(t, 0)$ ein beweglicher Punkt auf der $x - Achse$ und $Q(a, t)$ ein laufender Punkt auf der Geraden h (Senkrechte im Punkt B zur x-Achse). Für $t = 0$ gilt dann $P = A$ und $Q = B$. Aus der *Zweipunktegleichung* ermitteln wir die Geradengleichung durch P, Q:

$$\overline{PQ}: \qquad \frac{y-0}{t-0} = \frac{x-t}{a-t} \quad \rightarrow \quad y = \frac{t\,(x-t)}{a-t} \tag{1}$$

Diese Gleichung beschreibt bei veränderlichen Parameter t die in Abbildung 3 konstruierte Geradenschar. Wir denken uns nun einen Kreis k_1 mit Mittelpunkt in $P(t, 0)$ und festen

Radius r. Die Kreisgleichnug für k_1 lautet dann:

$$k_1: \qquad (x-t)^2 + y^2 = r^2 \tag{2}$$

Die Schnittmenge aus Geradenschar (1) und den Kreisen (2) ist die gesuchte Lösungskurve. Die Auflösung mittels Computeralgebrasystem ergibt zwei Kurvenäste:

$$x_1(t) = t + \frac{r\,(a-t)}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}}, \quad y_1(t) = \frac{r\,t}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} \tag{3}$$

$$x_2(t) = t - \frac{r\,(a-t)}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}}, \quad y_2(t) = -\frac{r\,t}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} \tag{4}$$

Der zweite Kurvenast folgt aus dem unteren Schnittpunkt R' zwischen der Geraden durch PQ und dem Kreis k_1. Dieser Kurevnast ist in Dürers Konstruktionstexten nicht erwähnt. Dürer ging es vorrangig um die Konstruktion einer Kurve die den Linien auf einer Muschelschale ähnlich sind und das ist eindeutig der obere Kurvenast.

5.2 Anwendung der Vektorrechung

Etwas einfacher gestaltet sich die Herleitung der Kurve durch Anwendung der Vektorenreichnung. Wir betrachten dazu Abbildung 6. Punkt $O(0,0)$ markieren den Ursprung eines rechtwinklig, kartesischen Koordinatensystems. Punkt $P(t,0)$ ist ein beweglicher Punkt auf der x-Achse und Punkt $Q(a,t)$ ist ein beweglicher Punkt auf der Senkrechten in $B(a,0)$. Wir erhalten dann folgende Vektoren:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a-t \\ t \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mid \overrightarrow{PQ} \mid = \sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2} \tag{6}$$

Die Geradengleichung durch P, Q lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\mid \overrightarrow{PQ} \mid} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a-t \\ t \end{pmatrix} \setminus \sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2} \tag{7}$$

Für einen festen Wert r und variables t erhalten wir die gesuchte Paramterdarstellung, wobei wir die Komponenten von $\vec{x}$ getrennt notieren:

$$x_1(t) = t + r \cdot \frac{a-t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{8}$$

$$y_1(t) = 0 + r \cdot \frac{t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{9}$$

und

$$x_2(t) = t - r \cdot \frac{a-t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{10}$$

$$y_2(t) = 0 - r \cdot \frac{t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{11}$$

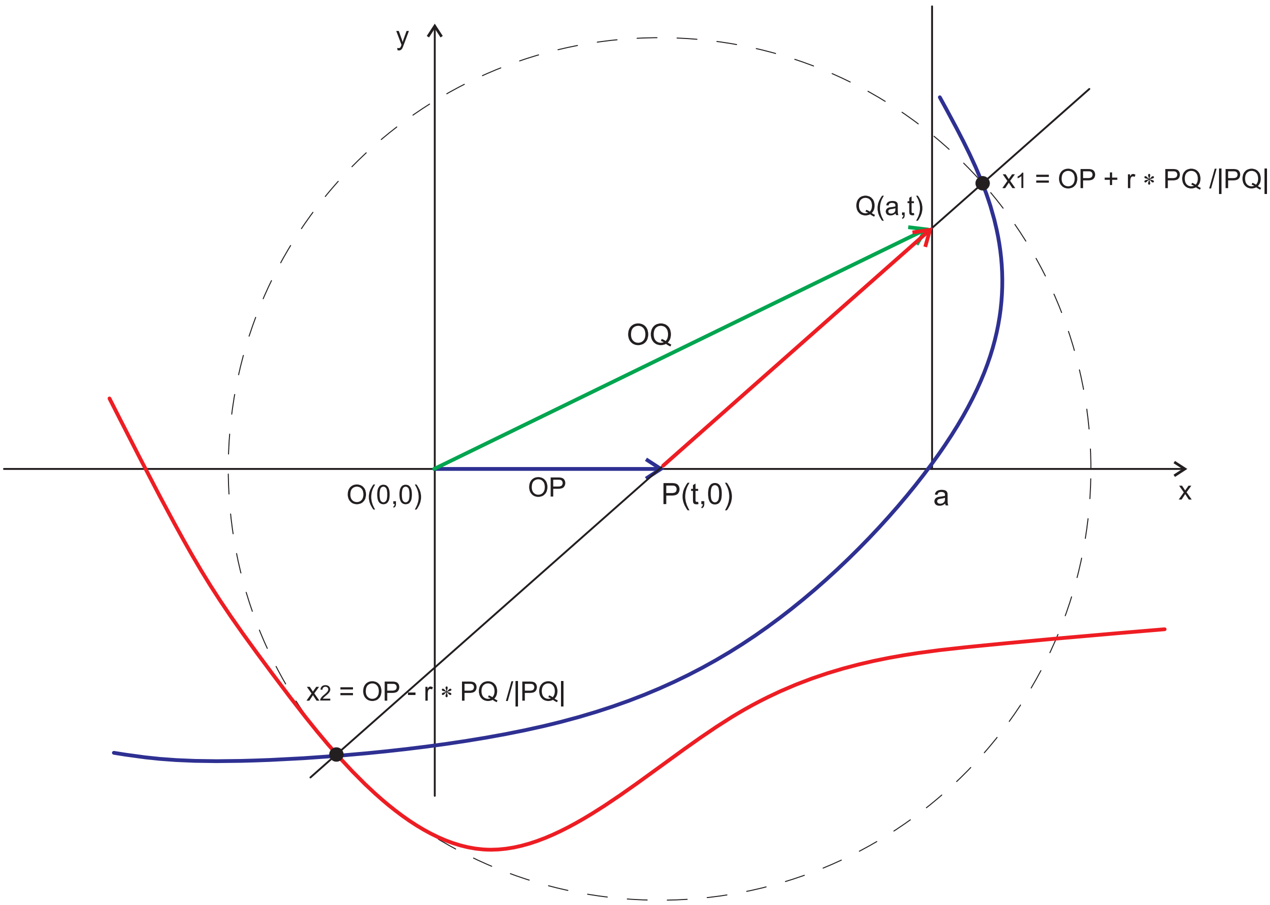

Abbildung 6: Bestimmung der Kurvengleichung mittels Vektoren

6 Parameterplot der Kurve in Mathematica

Im vorliegenden Fall wurde das CAS Programm Mathematica zur Darstellung der Kurven genutzt. Die Plotanweisung sieht wie folgt aus:

```
oP = {t, 0};
oQ = {a, t};
PQ = oQ - oP;
nPQ = Sqrt[a^2 - 2 a t + 2 t^2];
x1 = oP + r PQ / nPQ
x2 = oP - r PQ/ nPQ
a=13; r=16;
ParametricPlot[{x1,x2},{t, -30,30},
AxesLabel -> {"x","y"}, Gridlines -> Automatik]
```

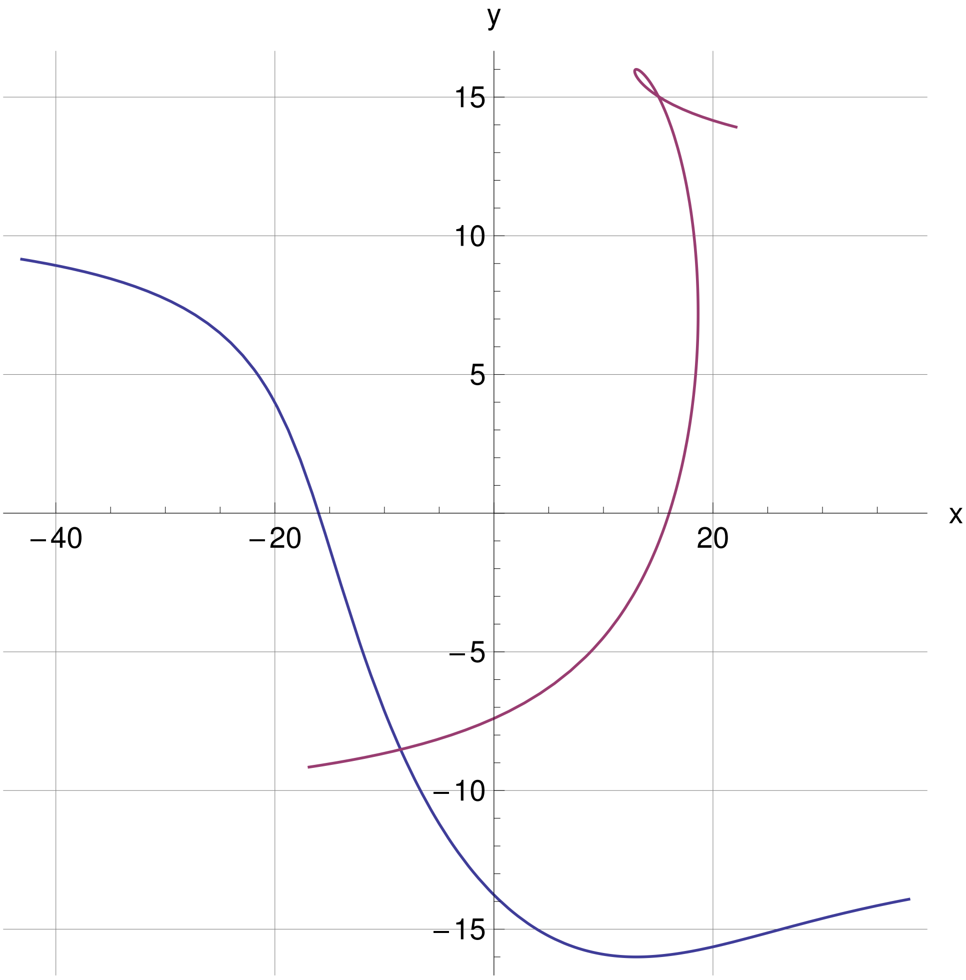

Abbildung 7: Parameterplot für $-30 \leq t \leq 30$

6.1 Plot einer Kurvenschar für $4 \leq a \leq 15$

Zur Darstellung mehrerer Muschellinien kann z.B. der Wert für a in einer geeigneten Schrittweite verändert werden. Abbildung 8 zeigt ein Beispiel für $4 \leq a \leq 15$.

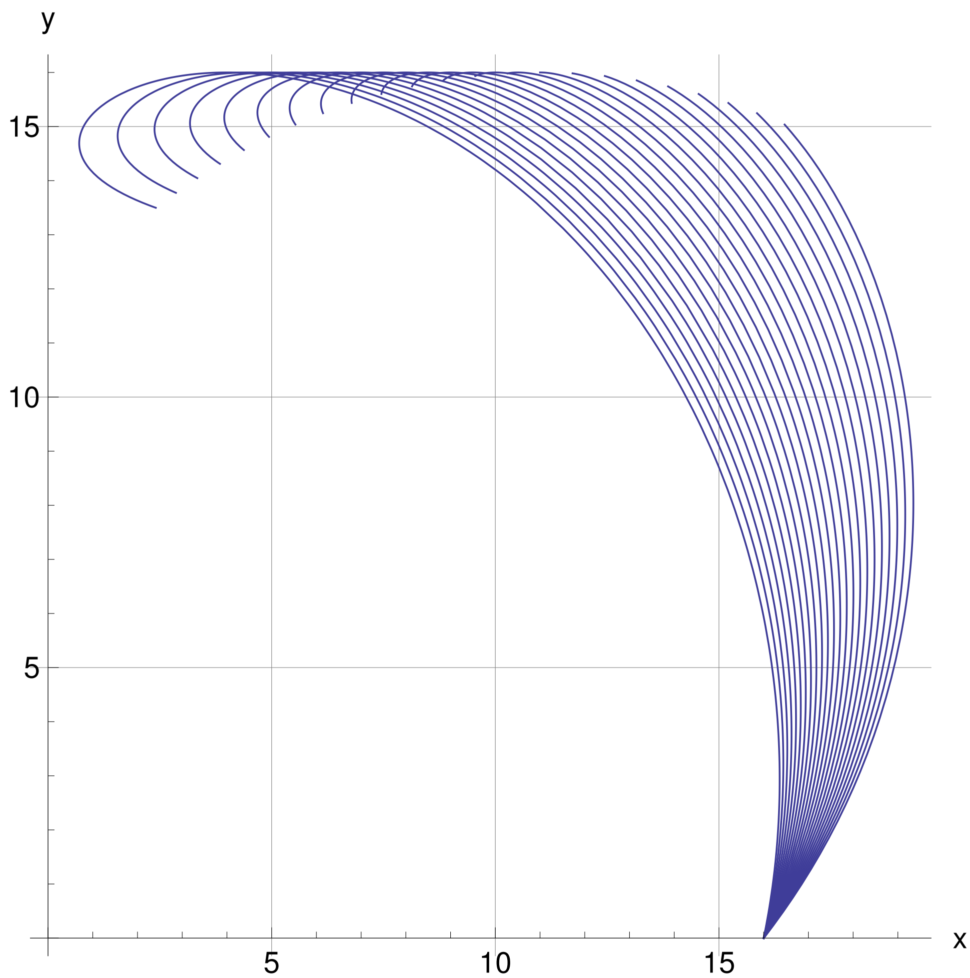

Abbildung 8: Muschellinen für verschiedene Werte von a, $4 \leq a \leq 15$ und $r = 16$

6.2 Schnittpunkte der Kurvenäste

nach einer Idee von Thomas Thrun und Willy Stirn

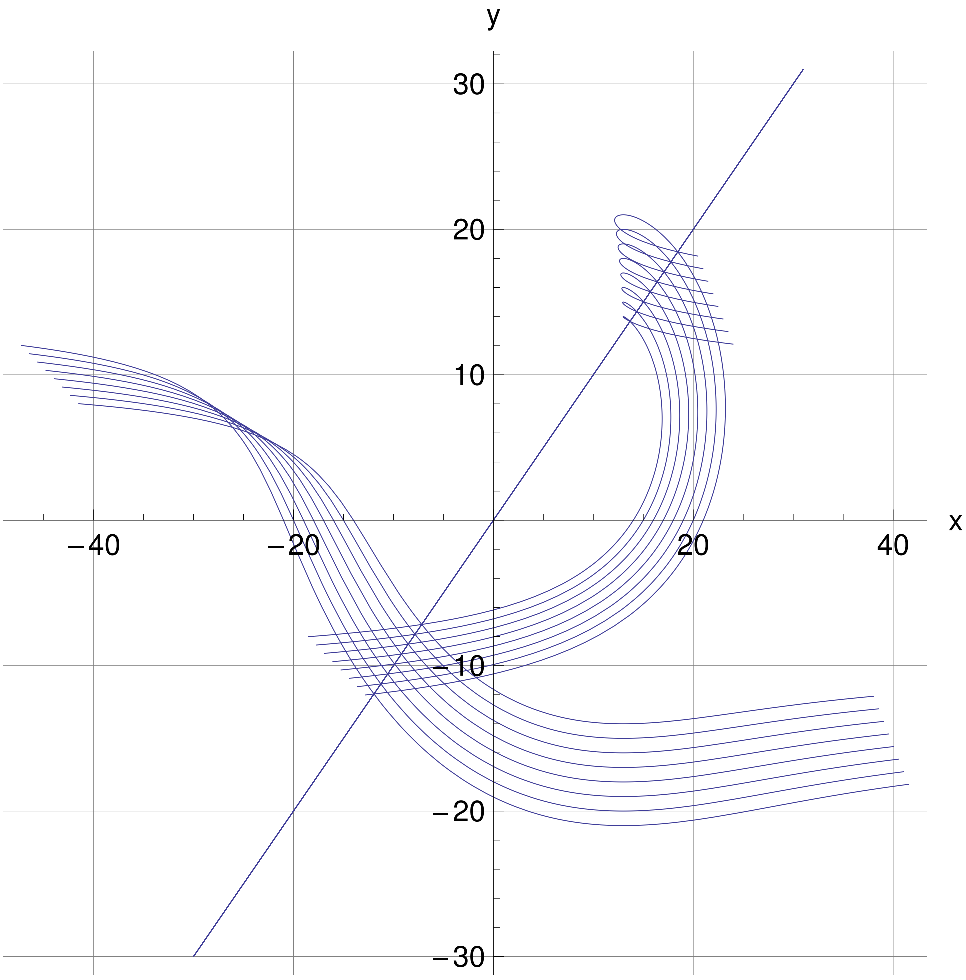

Abbildung 9: Die Schnittpunkte der Kurvenäste liegen auf $y = x$, $\quad a = 13, 14 \leq r \leq 21$

In Abbildung 9 ist eine Kurvenschar für $a = 13, 14 \leq r \leq 21$ gezeigt. Betrachtet man die Selbstüberschneidung des oberen Kurvenastes (1.Quadrant) und die Schnittpunkte der beiden Kurvenäste im 3. Quadranten fällt auf, dass die Punkte immer auf der Geraden $y = x$ liegen.
Wir wollen nun zeigen, das für beliebiges $a > 0, r > 0$ diese Vermutung richtig ist.
Im ersten Schritt eliminieren wir aus dem Gleichungssystem $x_1(t), y_1(t)$ den Paramter t und erhalten so eine implizite Kurvengleichung der Form $F(x, y)$. Zur Elimination nutzen

wir wiederum das CAS Mathematica:

$$x_1(t) = t + r \cdot \frac{a - t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{12}$$

$$y_1(t) = r \cdot \frac{t}{\sqrt{(a^2 - 2\,a\,t + 2\;t^2}} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

$$F(x, y): \quad r^4 + y^2(a^2 - 2a(x + y) + 2(x^2 + y^2)) = r^2(x^2 + y(-2a + 3y)) \tag{15}$$

Im zweiten Schritt bestimmen wir alle Lösungen der impliziten Kurvengleichung für die $x = y$ gilt:

$$F(x, y): \quad r^4 + y^2(a^2 - 2a(x + y) + 2(x^2 + y^2)) = r^2(x^2 + y(-2a + 3y)) \tag{16}$$

$$y = x \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$\text{Lösungen} \tag{19}$$

$$x_{11} = \frac{1}{4} \cdot (a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}), \quad y_{11} = \frac{1}{4} \cdot (a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}) \tag{20}$$

$$x_{21} = \frac{1}{4} \cdot (a - \sqrt{a^2 + 8\,r^2}), \quad y_{21} = \frac{1}{4} \cdot (a - \sqrt{a^2 + 8\,r^2}) \tag{21}$$

Der Punkt $P_1(x_{11}, y_{11})$ ist der obere Schnittpunkt (1.Quadrant) und $P_2(x_{21}, y_{21})$ ist der Schnittpunkt im 3.Quadranten. Damit ist gezeigt, dass zwei unabhängige Schnittpunkte existieren und diese auf der Geraden $y = x$ liegen.

7 Flächeninhalt der Schleife im 1.Quadranten

Im ersten Schritt bestimmen wir die zum Knotenpunkt gehörenden Parameter t_1 und t_2. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, liegt der Knotenpunkt (Kurvenüberschneidung) immer auf der Geraden $y = x$. Wir lösen die Gleichung $x_1(t) = y_1(t)$ nach t auf:

$$t_1 = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2} - \sqrt{8\,r^2 - 2\,a\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right)}\right) \tag{22}$$

$$t_2 = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2} + \sqrt{8\,r^2 - 2\,a\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right)}\right) \tag{23}$$

Der Flächeninhalt wird für Kurven in Parameterform aus der *Leibnizschen Sektorenformel* errechnet:

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} (x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y)\, dt \tag{24}$$

$$\dot{x} = 1 - \frac{a\,r\,t}{(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}} \tag{25}$$

$$\dot{y} = \frac{a\,r\,(a-t)}{(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}} \tag{26}$$

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{r\left(-2\,t^3 + a\left(t^2 + r\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}\right)\right)}{2\,(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}}\, dt \tag{27}$$

$$A = \frac{r}{2}\left[-\frac{(a-t)^2}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} - r\,\arctan\left[1 - \frac{2\,t}{a}\right] - \frac{a\,\log\left[-a + 2\,t + \sqrt{2}\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}\right]}{\sqrt{2}}\right]_{t_1}^{t_2} \tag{28}$$

Eine algebraische Bestimmung des Flächeninhaltes scheitert aufgrund der transzendenten Funktionen. Die numerischen Näherungswerte betragen:

$$t_1 \approx 9.5111, \quad t_2 \approx 20.5314, \quad A \approx 0.598157 \tag{29}$$

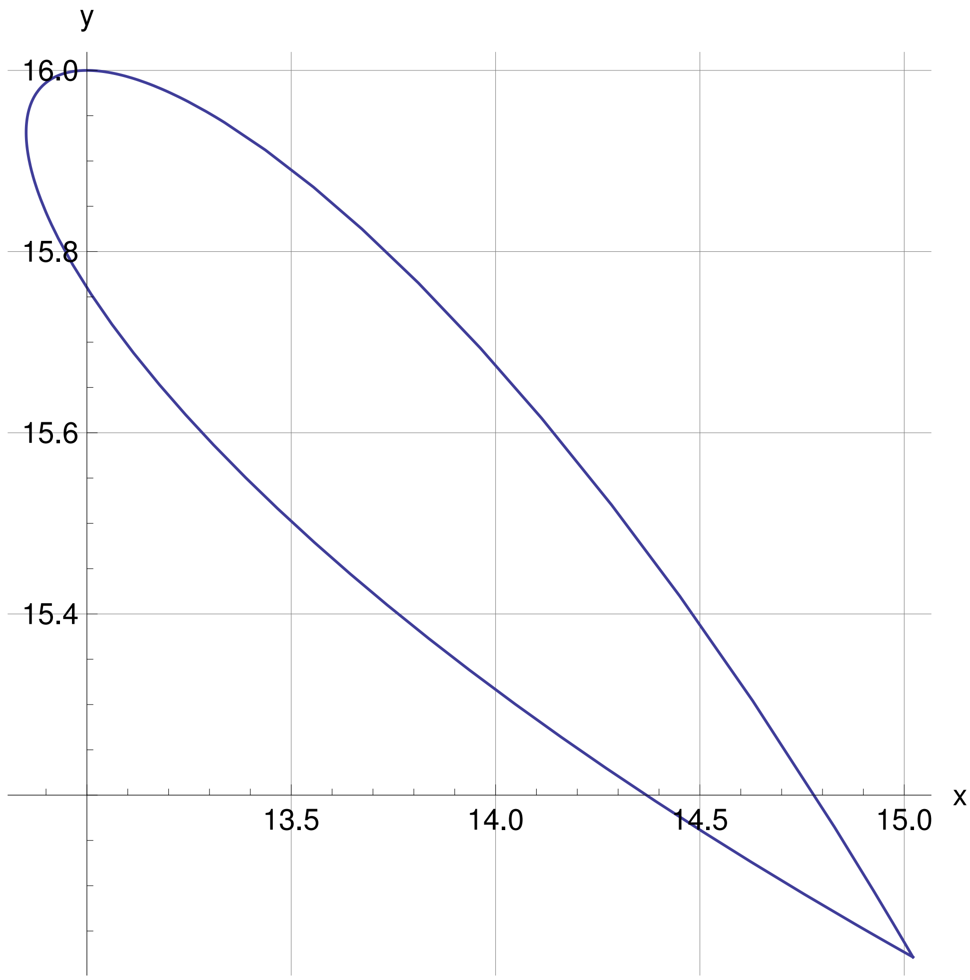

Abbildung 10: Parameterplot der Schleife für $t_1 \leq t \leq t_2$

Gleichung der Einhüllenden

Die Geradenschar wird durch die implizite Funktionsgleichung F beschrieben:

$$y = \frac{t\,(x-t)}{a-t} \quad \rightarrow \quad F = y\,(a-t) - t\,(x-t) \tag{30}$$

Aus F können wir die Gleichung der einhüllenden Kurve bestimmen, indem wir aus dem Gleichungssystem (31) den Parameter t eleminieren :

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial [y\,(a-t) - t\,(x-t)]}{\partial t} = 2\,t - x - y = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x+y}{2} \tag{32}$$

Das Ergebnis aus (32) setzen wir in (30) ein:

$$t = \frac{x+y}{2} \quad \rightarrow \quad y\,(a-t) - t\,(x-t) = 0 \quad \rightarrow \quad 4\,a\,y = (x+y)^2 \tag{33}$$

Bei (33) handelt es sich um eine Kegelschnittgleichung (Parabel).Man kann eine Auflösung nach y vornehmen. Der untere Ast der Kurve lautet dann:

$$y = 2\,a - x - 2\,\sqrt{a^2 - a\,x} \tag{34}$$

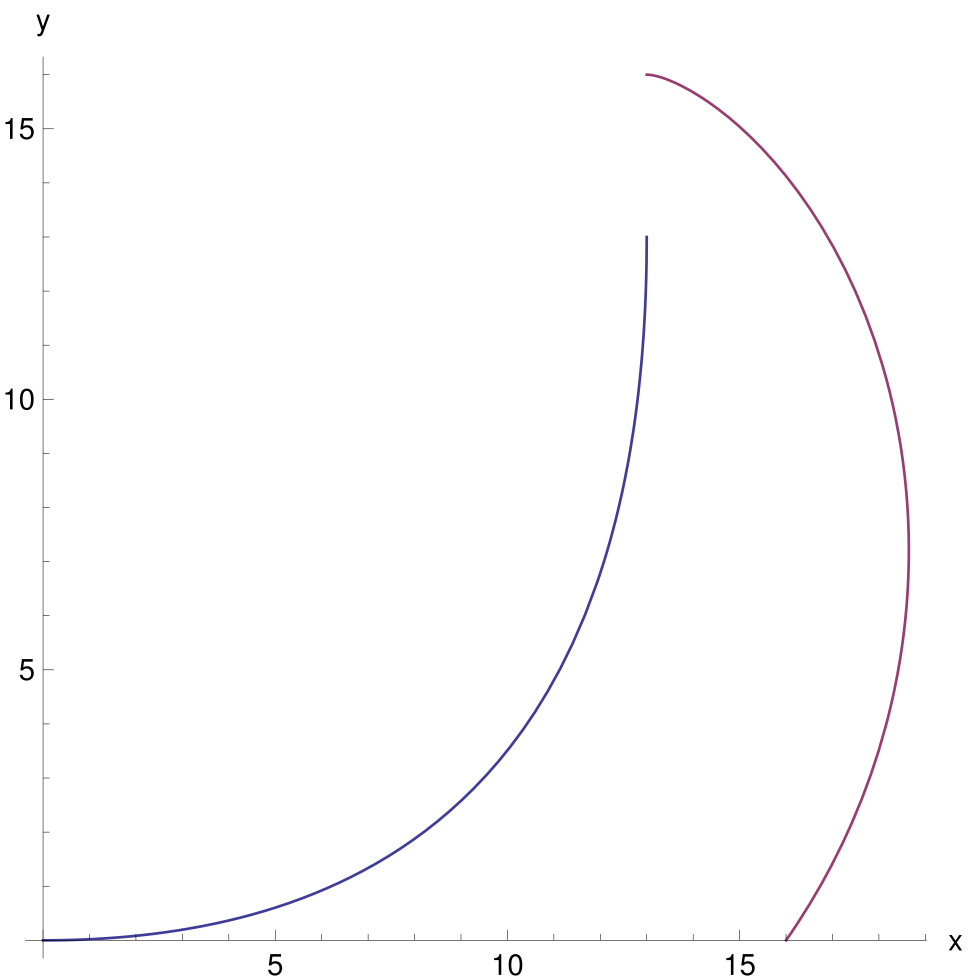

Abbildung 11: Einhüllende und Muschellinie für $0 \leq t \leq 13$