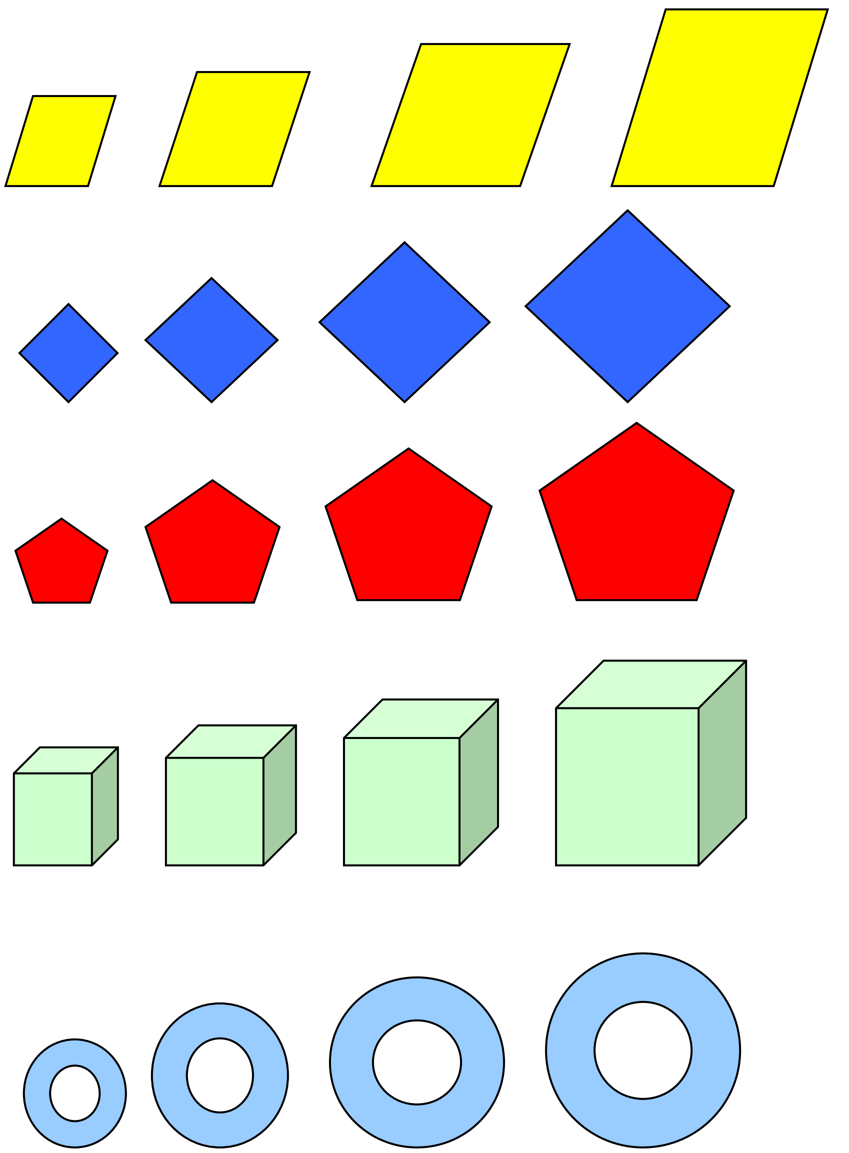
Ähnlichkeit

Eine Ähnlichkeit zwischen geometrischen Figuren wie Dreiecken, Rechtecken liegt dann vor, wenn die eine Figur eine Verkleinerung, Vergrößerung oder Kopie der anderen ist. Beide haben die gleiche Gestalt, und das Verhältnis der entsprechenden Seitenlängen zueinander ist gleich. Das gilt für alle Spiegelungen - dann sind sie ungleichsinnig ähnlich - bzw. alle Verschiebungen oder Drehungen- dann sind sie gleichsinnig ähnlich.

Beispiele: Die nebeneinander stehenden Figuren sind ähnlich.

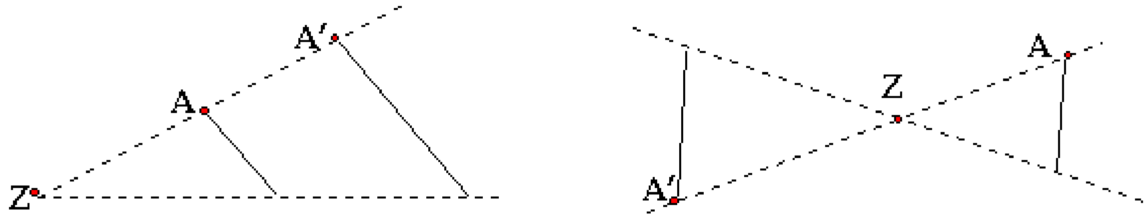


Streckung

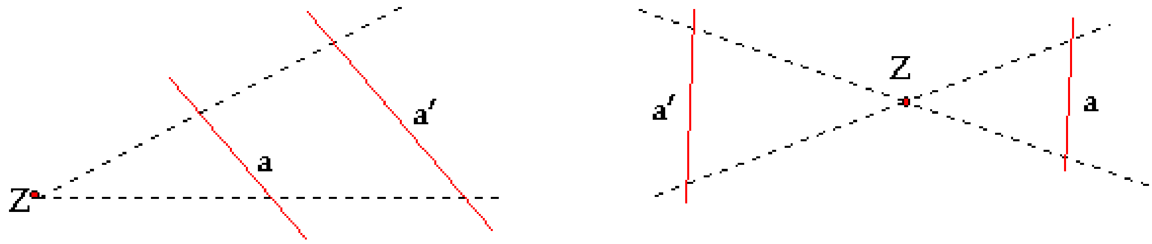
Die bekannteste Ähnlichkeitsabbildung ist die zentrische Streckung. Diese Abbildung ist durch das Zentrum Z, auch Streckzentrum genannt, und durch einen Streckfaktor k ($k \neq 0$) erklärt. Es gilt:

1. Z wird auf sich abgebildet. (Fixpunkt)

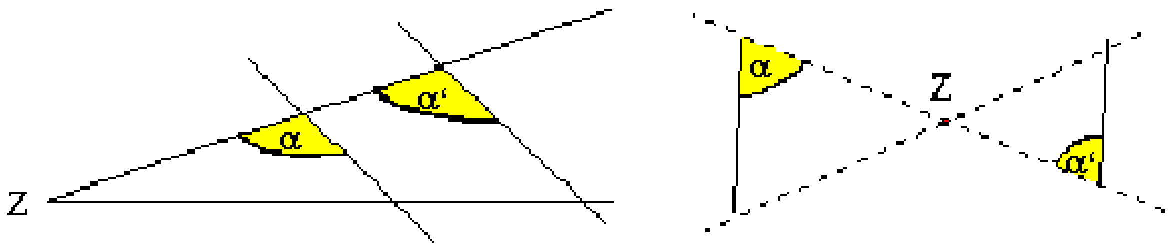
2. Für einen Punkt $A \neq Z$ liegt der Bildpunkt A' auf der Geraden ZA und hat von Z die k-fache Entfernung wie A von Z; also $|ZA'| = |k| \cdot |ZA|$. Ist $k > 0$, liegt A' auf der gleichen Seite von Z wie A, falls $k < 0$ liegt A' auf der anderen Seite.



3. Durch eine zentrische Streckung gehen Geraden in parallele Bildgeraden über.



4. Winkel werden bei der zentrischen Streckung auf maßgleiche Winkel abgebildet.



5. a) Ist der Streckungsfaktor $|k| > 1$ liegt eine Vergrößerung vor.

   b) Ist der Streckungsfaktor $0 < |k| < 1$ liegt eine Stauchung vor.

   c) Ist der Streckungsfaktor $k = 1$ liegt eine identische Abbildung vor.

   d) Ist der Streckungsfaktor $k = - 1$ liegt eine Punktspiegelung vor.

Ähnlichkeitssätze

Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung oder durch eine Verkettung von Kongruenzabbildungen aufeinander abgebildet werden können.
Ebenso wie bei den Kongruenzsätzen lassen sich Ähnlichkeitssätze formulieren:

1. Ähnlichkeitssatz
   (entspricht dem Kongruenzsatz WSW):
   Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei
   Winkeln übereinstimmen.

2. Ähnlichkeitssatz
   (entspricht dem Kongruenzsatz SSS):
   Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis
   der drei Seiten übereinstimmen.

3. Ähnlichkeitssatz
   (entspricht dem Kongruenzsatz SWS):
   Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis
   zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
   übereinstimmen.

4. Ähnlichkeitssatz
   (entspricht dem Kongruenzsatz SSW):
   Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis
   zweier Seiten und in dem Gegenwinkel der
   größeren Seite übereinstimmen.

Ähnlichkeitsbeziehungen im Dreieck

1. Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 2 : 1 und schneiden sich in einem Punkt.

2. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

   Also gilt: $$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$$

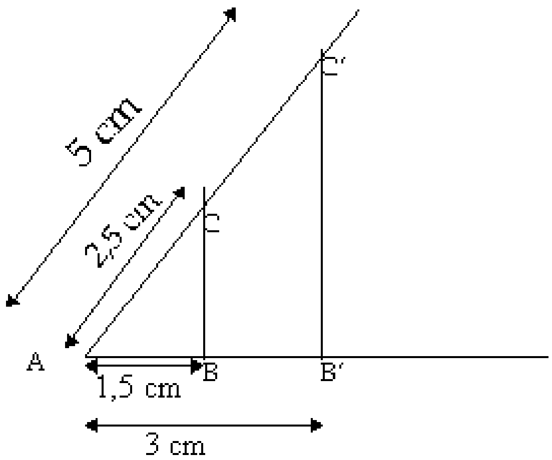
3. Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, die in der Größe eines Winkels übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der Längen der Seiten, die diesen Winkel einschließen.

   Also gilt: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c_1 \cdot h_1}{c_2 \cdot h_2} = \frac{c_1 \cdot b_1}{c_2 \cdot b_2}$$

Strahlensätze und Streckenteilung I

1. Strahlensatz:

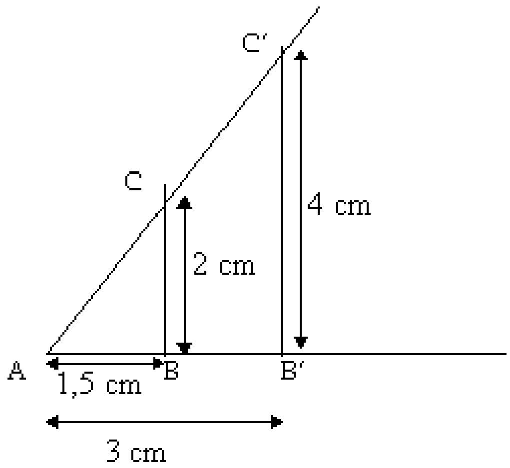
Das Streckenverhältnis auf dem einen Strahl ist genau so groß wie das Streckenverhältnis auf dem anderen Strahl.



$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB} = \frac{5}{2{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2$$

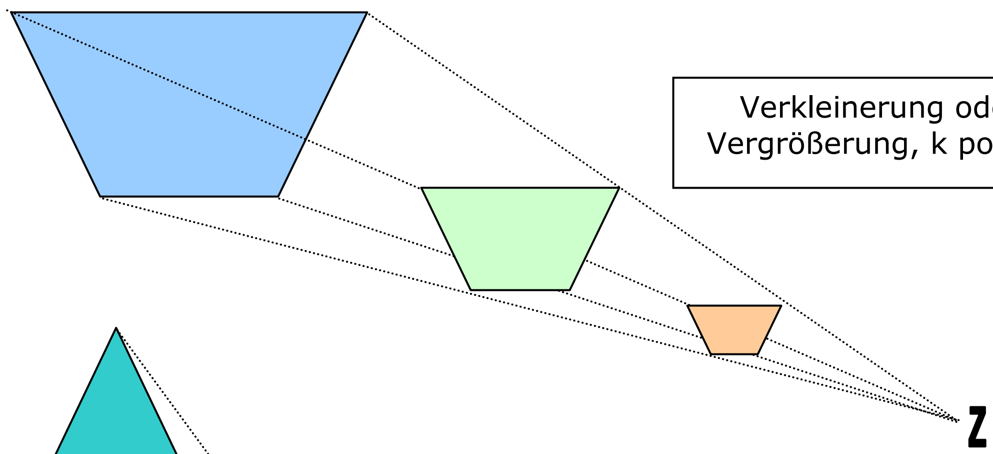
2. Strahlensatz:

Das Streckenverhältnis auf dem einen Strahl ist genau so groß wie das Streckenverhältnis der beiden Parallelenabschnitte.

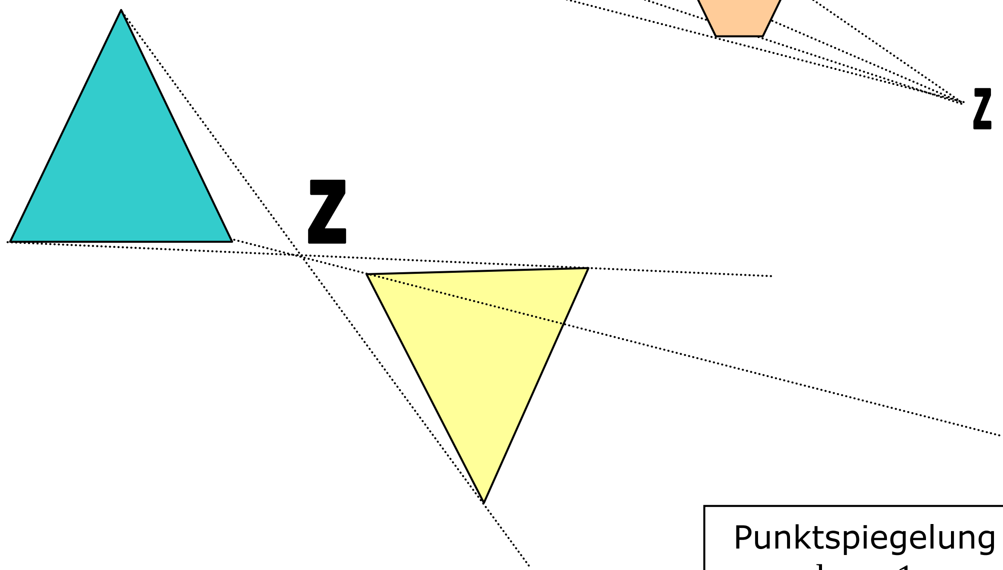


$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{1{,}5} = \frac{4}{2} = 2$$

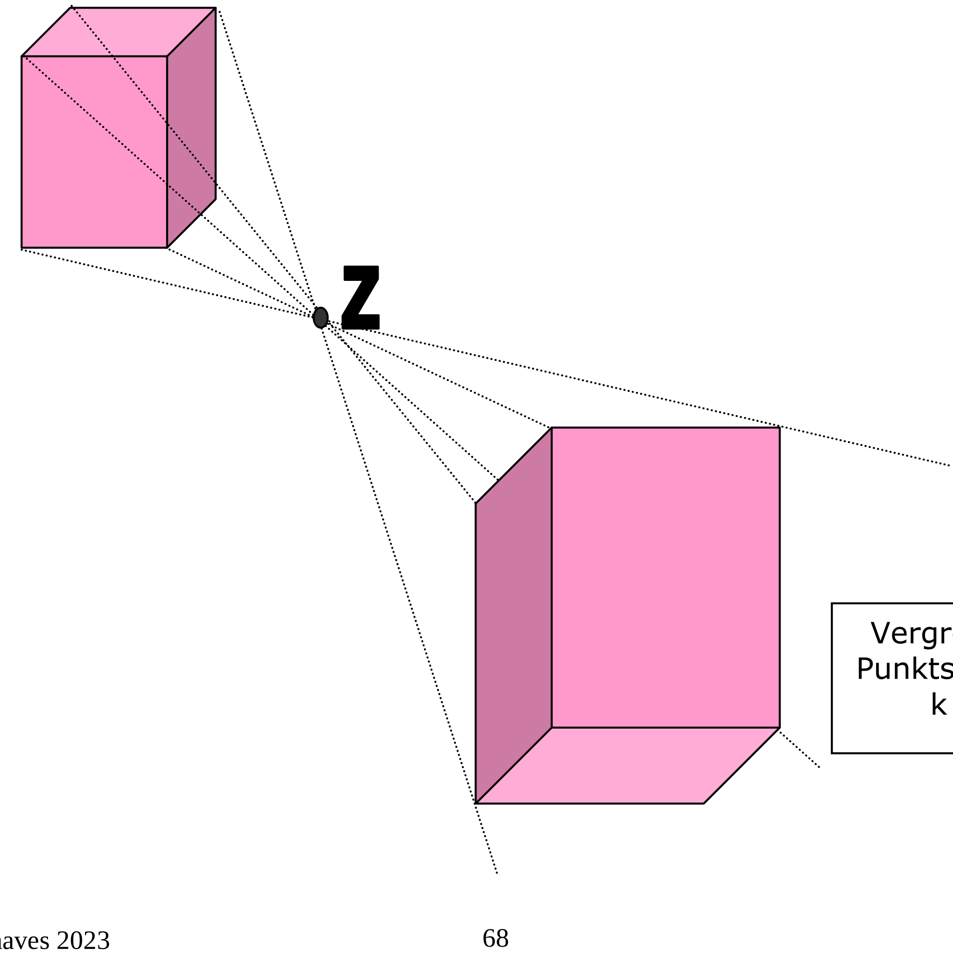
Beispiele



Verkleinerung oder
Vergrößerung, k positiv



Punktspiegelung
$k = -1$



Vergrößerung,
Punktspiegelung
$k < -1$