Abiturprüfung Frühjahr 2005 Leistungsfach Mathematik

Aufgabe 2

Die Punkte N(0/0/0), A(8/0/0), B(0/4/0), C_k(0/k/6) seien die Eckpunkte einer Schar von dreiseitigen Pyramiden $NABC_k$.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide $NABC_0$ (also für k=0). Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC_0, den Schnittwinkel der Fläche ABC_0 mit der x-y-Ebene und den Abstand dieser Ebene vom Nullpunkt.

b) Betrachten Sie nun die Schar der Dreicke ABC_k und ermitteln Sie die Werte von k, für die das Dreieck gleichschenklig wird mit C_k als Spitze. Untersuchen Sie, ob es unter der Pyramidenschar $NABC_k$ eine Pyramide gibt die ein maximales oder minimales Volumen besitzt.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis und beschreiben Sie die Lage aller C_k.

c) Stellen Sie eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC_k auf.
Gibt es unter der Schar der Dreiecke ABC_k eines mit maximalem oder minimalem Flächeninhalt?
Wenn ja bestimmen Sie dieses. Sonst begründen Sie, warum es ein solches nicht geben kann.

	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	Zuordnung und vorgesehene Bewertung		
		I	II	III
2a	Zeichnung Innenwinkel $\alpha=44,3^0$, $\beta=75,6^0$, $\gamma=60,1^0$ Normalenform der Ebene $(3/6/4)\cdot x - 24 = 0$ Schnittwinkel: $59,2^0$ Abstand vom Ursprung: $24/\sqrt{61}$	2 3 1 2 1	 2	
2b	Ansatz $\lvert BC_k\rvert=\lvert AC_k\rvert$, k=-6 Volumenteil: $V_k=32$ ist unabhängig von k , daher gibt es weder ein Maximun noch ein Minimum. C_k liegt auf einer Geraden, die parallel zur Dreiecksfläche des Dreiecks NAB ist.	 2	3 1	 2
2c	Koordinaten des Lotpunktes F von C_k auf AB müssen in Abhängigkeit von k berechnet werden. C(0/k/6), F(a/b/0), F liegt auf y=-x/2+4, daher b=-a/2+4 $AB\cdot C_kF=0$ ergibt -10a-4k+16=0, es folgt a=-0,4k+1,6 und b=0,2k+3,2 Flächeninhalt des Dreiecks: $A_{ABC}=1/2\cdot\lvert AB\rvert\cdot\lvert FC_k\rvert$, für die Suche nach dem Extremum kann also die Funktion $f(k)=\lvert FC_k\rvert^2 = 5(1,6-0,4k)^2$ verwendet werden, da die beiden anderen Faktoren nicht von k abhängen. Diese Funktion besitzt bei $k_{min}=4$ ein Minimum.		7 3 2 2	
	Summe der Punkte in dieser Aufgabe:	11	20	2