

Fachlehrer: *www.helmut-hupfeld.de*

Datum: 1. Juli 1998

**Aufgabe 1** (ca. 40 min)

Bei einem Landwirt ferkelten im Jahr 25 Säue. Sei  $X_F$  := Anzahl der Ferkel pro Wurf. Die empirisch ermittelten Werte für  $X_F$  sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zufallsgröße := $X_F$	5	7	8	9	10	11	14
Häufigkeit	1	3	6	7	5	2	1

- Zeichnen Sie die (empirische) Verteilungsfunktion der Stichprobe.
- Berechnen Sie Mittelwert (Erwartungswert) und Standardabweichung der Stichprobe.
- Berechnen Sie  $P(X_F \geq 8)$ .
- Welche Häufigkeiten würden sich ergeben, wenn man voraus setzt, dass die Daten normal verteilt sind? Geben Sie die Funktionsgleichung an, nach der man das berechnen kann und zeichnen Sie den Graphen in die obige Skizze ein (Eventuell am Schluss zeichnen).

**Aufgabe 2** (ca. 40 min ohne c), für c) noch einmal 40 min)

Für poissonverteilte Zufallsgrößen gilt:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Berechnen Sie den Erwartungswert  $E(X)$  und die Varianz  $V(X)$  für solche Zufallsgrößen.
- Wir setzen nun voraus, dass  $X_1$  und  $X_2$  poissonverteilt sind mit den jeweiligen Parametern  $\lambda_1=3$  und  $\lambda_2=4$ . Rechnen Sie die Werte für  $P(X_1=k_1)$  bzw.  $P(X_2=k_2)$  für  $k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$  und  $k_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$  aus.  
Wir setzen nun:  $k_3 = k_1 + k_2$ . Rechnen Sie für  $k_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$  die Werte für  $P(X_3=k_3)$  mit Hilfe der berechneten Werte von  $P(X_1=k_1)$  und  $P(X_2=k_2)$  aus.
- Zeigen Sie, dass  $X_3 = X_1 + X_2$  ebenfalls poissonverteilt ist mit  $\lambda_3=7$ .  
Hinweis zur allgemeinen Lösung:
  - Zeigen Sie, dass man dieselben Werte, die Sie oben berechnet haben, direkt für  $X_3$  berechnen kann, wenn man annimmt, dass  $X_3$  poissonverteilt ist mit  $\lambda=7$ .
  - Stellen Sie eine allgemeine Formel dafür auf, wie  $P(X_3=k_3)$  mit Hilfe von  $P(X_1=k_1)$  und  $P(X_2=k_2)$  zu berechnen ist.
  - Berechnen Sie:  $k!(k_1 + k_2)^k$  und vergleichen Sie beides.
 Damit Ihnen die Lösung gelingt probieren Sie es erst einmal mit  $k_3=3$ .

### Aufgabe 3 (ca. 30 min)

Von zwei Sorten Schrauben (2% und 6% fehlerhafte) werden je 1000 Schrauben in Päckchen zu je 100 Schrauben verpackt und die beiden Pakete verschickt. Die Pakete sind versehentlich nicht beschriftet worden. Vom 1. Paket soll die Qualität des Inhaltes festgestellt werden. Dazu wird ein Päckchen aus diesem Paket entnommen und auf seine Güte geprüft indem die unbrauchbaren Schrauben in diesem Päckchen gezählt werden. Man definiert  $X :=$  Anzahl der unbrauchbaren Schrauben.

- Berechnen Sie zunächst für beide Fälle mit Hilfe der Normalverteilung Vertrauensintervalle (keine Testsituation), in das die Zufallsgröße  $X$  mit 95% Sicherheit fallen würde, je nachdem welche Qualität vorliegt. Berechnen Sie mit Hilfe der beigefügten Tabellen oder mit dem Taschenrechner die wahre (exakte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße in das von Ihnen berechnete Vertrauensintervall fällt.
- Ein Paket soll nun verkauft werden. Daher soll aus diesem ein Päckchen getestet werden. Sollte man  $H_0: p=0,02$  oder  $H_0: p=0,06$  wählen, um die Qualität zu kennzeichnen, oder ist die Wahl für  $H_0$  gleichgültig? Begründen Sie Ihre Ansicht.
- Berechnen Sie für  $H_0: p=0,06$  einen Annahmebereich in den die Zufallsgröße mit mindestens 95% Sicherheit fällt. Wie groß ist der Fehler  $\alpha$ , daß  $H_1$  fälschlicherweise angenommen wird? Wie groß ist der Fehler  $\beta$ , daß  $H_0$  fälschlicherweise angenommen wird? Machen Sie eine Skizze zu den Fehlern  $\alpha$  und  $\beta$ . Drücken Sie in Worten aus, was die Fehler  $\alpha$  und  $\beta$  inhaltlich in Bezug auf die Aufgabenstellung bedeuten.
- (Zusatzaufgabe, falls Sie genügend Zeit haben): Aus beiden Paketen wird je ein Päckchen getestet und ihm nach dem obigen Kriterium eine Qualität zugeordnet. Welche Fehler werden dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit gemacht?

### Aufgabe 4 (ca. 20 min)

Es soll die Hypothese  $H_0: p=0,3$  gegen  $H_1: p=0,5$  getestet werden. Man gibt dazu die Risiken 1. und 2. Art mit  $\alpha=0,02$  und  $\beta=0,08$  vor. Berechnen Sie welches  $n$  für den Test unter diesen Bedingungen erforderlich ist und wie der Annahmebereich für  $H_0$  lauten muss. Fertigen Sie auch zu dieser Fragestellung eine Skizze an.

### Aufgabe 5 (ca. 30 min)

Im folgenden werden Zufallsexperimente und dazu definierte Zufallsgrößen genannt. Geben Sie begründet an, welche Verteilung man zur Berechnung von Fragestellungen zu diesen Zufallsexperimenten man verwenden kann.

- Zufallsexperiment: Roulette, verwendete Zufallsgröße:
  - $X_1$  = Nummer des Faches, in die die Kugel fällt,
  - $X_2$  = Summe von zwei Nummern,
  - $X_3$  = Anzahl der "13"en bei 5 Drehungen,
  - $X_4$  = Summe der Nummern bei 100 Drehungen,
  - $X_5$  = Anzahl der 13en bei 200 Drehungen,
  - $X_6$  = Anzahl der Drehungen bis das dritte Mal "13" erscheint,
- Zufallsexperiment: Ziehen von 10 Kugeln aus einer Urne, in der sich 30 rote und 30 schwarze Kugeln befinden.
  - $X_7$  = Anzahl der roten Kugeln (ohne Zurücklegen),
  - $X_8$  = Summe der Augenzahlen, wenn eine schwarze als 2 und eine rote als 3 gewertet wird (mit Zurücklegen),

$X_9$  = Anzahl der roten plus Anzahl der schwarzen Kugeln,  
 $X_{10}$  = Anzahl der schwarzen Kugel (mit Zurücklegen).