Rouletteaufgabe

Jemand fragt uns, ob er folgendes Spiel beim Roulette versuchen sollte: Er will 10-mal spielen und bei jedem Spiel 10 € einsetzen. Die 10 € will er immer auf Manque setzen, das ist der 1. Block von 12 Zahlen, also von 1 bis 12.
Verliert er, so ist der Einsatz verloren, gewinnt er, so bekommt er seinen Einsatz zurück und 20 € dazu.

a) Was ist das eigentliche zugrundeliegende einfache **Experiment** ? Welches komplexere Experiment macht der Spieler daraus ? Beschreiben Sie den genauen Aufbau des einfachen und komplexeren Experiments und deren Ergebnisräume.
b) Wie sind nun die einfache und die komplexe **Zufallsgröße** genau definiert, beschreiben Sie ihre Definitions- und Wertemenge genau und die Zuordnung der Elemente zueinander.
c) Berechnen Sie die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** der Zufallsgröße und stellen Sie sie übersichtlich dar.
d) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße.
e) Geben Sie einem Spieler eine Einschätzung speziell dieses Experimentes wieder, so dass er in die Lage versetzt wird, selber zu entscheiden, ob er das Spiel so spielen möchte oder nicht.

Lösung der Rouletteaufgabe

a) Es handelt sich grundsätzlich um ein Laplace-Experiment mit 37 gleichwahrscheinlichen Ausfällen. Das Experiment heißt: Drehen der Rouletteschüssel und ablesen des Ergebnisses, der Ergebnisraum ist: Ω = {"0","1","2", ... "36"}, d.h. die Bilder von "0" bis "36" sind die einzelnen Ausfallsmöglichkeiten bzw. Ergebnisse.
Bei dem einfachen Experiment (einmal drehen) ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen p=12/37, die zu verlieren 25/37.
Das komplexere Experiment besteht darin, dass das einfache Experiment 10-mal ausgeführt wird (Bernoulli-Kette).
b) Bei dem einfachen Experiment handelt es sich um ein Bernoulliexperiment, das 10-mal wiederholt wird. Wir nennen die einstufige Zufallsgröße X, die zusammengesetzte 10-stufige Zufallsgröße Z.
Die Definitionsmenge von X ist natürlich Ω, die Wertemenge von X ist W_X = {-10,20}, wobei P(X=-10)=25/37 und P(X=20)=12/37.
Die Definitionsmenge von Z (es wird X 10-mal ausgeführt) ist die Menge der 10-Tupel:
Ω_Z = {("0","0",..."0"),("0","0",...."1"),......("36","36",...."36")}, (das erste 10-Tupel bedeutet dass man 10-mal verliert).
die Wertemenge ist W_Z = {-100,-70,-40,-10,20,50,80,110,140,170,200}.
Es gilt nun:

$X(\omega)$ = -10 falls ω ε {"0","13",......"36"} und
$X(\omega)$ = +20 falls ω ε {"1","2",......"12"}
Z = X + X + X + X + X + X + X + X + X + X

Rechner: seq((10-k)*20-10*k,k,0,10) → wz

c) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Verteilung) von Z lässt sich aus den Parametern n = 10 und $p = \frac{12}{37}$ bzw. dem Term $(\frac{12}{37}G + \frac{25}{37}N)^{10}$ herleiten.

(Ein einzelner Summand davon wie z.B. $0{,}221 \cdot G^4 \cdot N^6$ bedeutet dann, dass die Wahrscheinlichkeit 4-mal zu gewinnen und 6-mal zu verlieren 0,221 ist, d.h. P(Z=4) = 0,221).

Der obige Term lässt sich leicht mit dem Rechner ausrechnen.
Natürlich können wir die Binomialkoeffizienten auch einzeln mit dem Rechner mit bd(n,p,k) berechnen. Die Werte sind in der Tabelle auf der nächsten Seite eingetragen.
Rechner: seq(ncr(10,(10-k))*(12/37)^(10-k)*(25/37)^k,k,0,10) → pz

d) Die Tabelle und die Graphik auf der nächsten Seite habe ich mit Excel erstellt. Hier habe ich auch gleichzeitig den Erwartungswert und die Varianz und Standardabweichung ausrechnen lassen.
Rechner: sum(wz*pz) → erw, sum(pz*(wz-erw)^2) → vz, s=Wurzel(vz).

e) Grundsätzlich ist zu sagen, dass der Spieler auf lange Sicht keine Chance hat, zu gewinnen. Er wird im Mittel 0,27 € pro Spiel verlieren.
Kurzfristig kann er natürlich auch gewinnen. In diesem konkreten Spiel kann er nur glatte Summen gewinnen oder verlieren und zwar gilt:
Am wahrscheinlichsten ist, dass er 10 € verliert (p=0,263).
Die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt (P(Z>0)) liegt aber nur bei p=0,416.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er entweder 20 € gewinnt oder 10 € verliert ist: 0,484 also fast 50%.
Mit der Wahrscheinlichkeit von 0,817 tritt das Ereignis ein, dass er entweder 10 oder 40 € verliert oder dass er 20 oder 50 € gewinnt.