Die Suche nach dem passenden Zahnrad

Aufgabenstellung I, Exentergetriebe

nach einer Idee von Helmut Neunzert

Die Problemstellung zur Aufgabe kommt aus der Uhrenindustrie. Zur Fortschaltung der Datumsanzeige wird ein *exentrisches* Getriebe benötigt (Abbildung 1). Zahnrad1 ist dabei nicht zentrisch gelagert, d.h. sein Drehzentrum D_1 ist um die Distanz e aus der Mitte des Rades versetzt. Der Quotient e/r wird in einem solchen Getriebe als *Exentrizität* bezeichnet.
Gesucht ist nun das passende Gegenstück, d.h. ein ovales Rad2 das ständig im Eingriff mit Rad1 steht und sich bei einer Umdrehung von Rad1 genau einmal um seine Achse dreht.

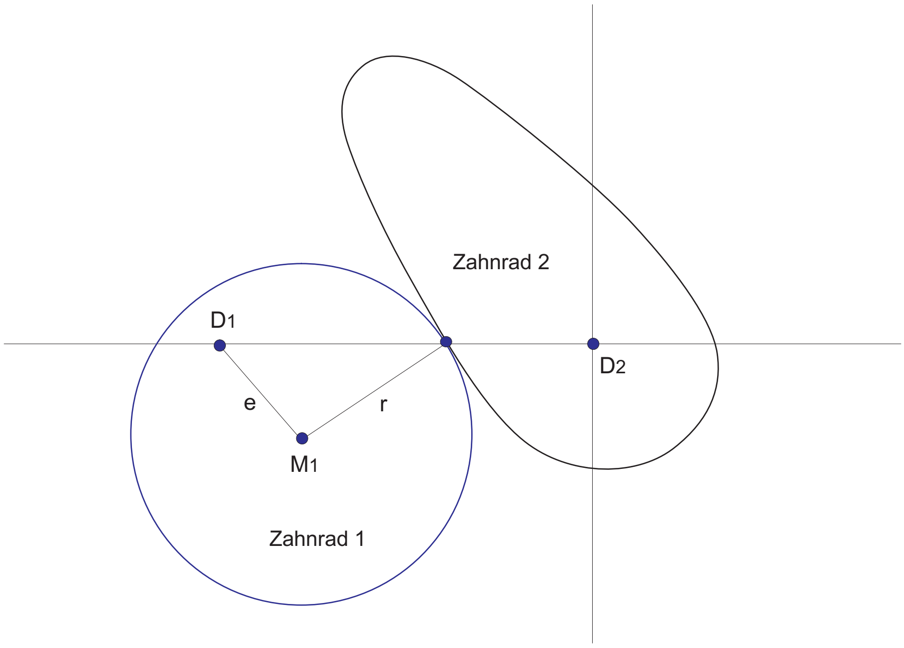

Abbildung 1: Exentergetriebe

1. Formuliere aus den physikalischen Bedingungen der Aufgabenstellung zwei Gleichungen aus denen man die Kurvenform vom Zahnrad2 berechnen kann.

2. Stelle eine Differentialgleichung (DGL) für den Drehwinkel β vom Rad2 auf, in Abhängigkeit vom Drehwinkel α vom Rad1, d.h. $\beta(\alpha)$.

3. Löse die DGL mittels numerischer Integration und plotte die Kurve vom Rad2 für $r = 5, e = 4$.

Aufgabenstellung II, Zahnräder aus Polarkurven

nach einer Idee von Ingmar Rubin

Wir wollen die vorangehende Aufgabenstellung verallgemeinern. Vorgelegt sei die Randkurve vom Rad1 als Polargleichung $r_1 = r_1(t)$. Die Funktion $r_1(t)$ soll dabei gewissen Eigenschaften genügen, damit unsere Problemstellung sinnvoll bleibt:

1. die Kurve, die $r_1(t)$ beschreibt, sei auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2\,\pi$ hinreichend glatt, d.h. es existiere eine stetige erste und zweite Ableitung von r_1 nach t,

2. die Kurve $r_1(t)$ sei $2\,\pi$ periodisch, d.h. es gilt $r_1(0) = r_1(2\,\pi)$ - alle Formen von Spiralkurven scheiden damit aus,

Die verallgemeinerte Aufgabenstellung lautet dann:

1. vorgelegt sei die Polarkurve $r_1(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2\,\pi$,

2. Entwerfe einen Lösungsalgorithmus zur Bestimmung einer passenden Gegenkurve $r_2(t)$. Benutze als Unterstützung ein Computerprogramm Deiner Wahl.

3. Bestimme für die folgenden Polargleichungen $r_1(t)$ die Gegegenkurve durch numerische Simulation. Plotte beide Kurven $r_1(t)$, $r_2(t)$ in ein Diagramm $(0 \leq t \leq 2\,\pi)$.

   (a) $r_1(t) = 1 + \cos^2(t)$,
   (b) $r_1(t) = \frac{5}{4} + \cos(t)$,
   (c) $r_1(t) = 2 + \cos(3\,t)$

Gesamtpunktezahl = 14